FLORENTIN SMARANDACHE

GENERALISATIONS ET GENERALITES

Traduit du roumain
par l'auteur
et
Eleonora Smarandache

Assistés par
Sophie Mugnier

ÉDITION NOUVELLE 1984

FLORENTIN SMARANDACHE

Professeur de Mathématiques

Membre de l'Association Américaine de Mathématiques

GENERALISATIONS ET GENERALITES

Traduit du roumain
par l'auteur
et
Eleonora Smarandache

Assistés par
Sophie Mugnier

ÉDITION NOUVELLE 1984

A V A N T - P R O P O S

"Généralisations et Généralités" , pourquoi ce titre ? Parce que l'auteur a voulu rassembler ici quelques-unes de ses recherches originales (qui sont donc des "généralités") , dans diverses branches des mathématiques (algèbre, théorie des nombres, géométrie, analyse, linguistique, mathématiques distrayantes) , même si les articles qui composent ce recueil n'ont pas toujours de liaison entre eux.

"Généralisations" , parce qu'un grand nombre d'articles élargissent des résultats connus , et ce grâce à un procédé simple, dont il est bon de dire quelques mots :

> On généralise une proposition mathématique connue $P(a)$, où a est une constante , à la proposition $P(n)$, où n est une variable qui appartient à une partie de N .
> On démontre que P est vraie pour tout n par récurrence : la première étape est triviale, puisqu'il s'agit du résultat connu $P(a)$ (et donc déjà vérifié avant par d'autres mathématiciens !). Pour passer de $P(n)$ à $P(n+1)$, on utilise aussi $P(a)$: on élargit ainsi une proposition grâce à elle-même , autrement dit la généralisation trouvée sera paradoxalement démontrée à l'aide du cas particulier dont on est parti ! (cf. les généralisations de Hölder, Minkovski, Tchebychev, Euler).

L'auteur.

TABLE DES MATIERES

GENERALISATIONS

Une généralisation de l'inégalité de Hölder: 5
Une généralisation de l'inégalité de Minkovski: 7
Une généralisation d'une inégalité de Tchebychev: 8
Une généralisation du théorème d'Euler: 9
Une généralisation de l'inégalité de Cauchy-Bouniakovski-Schwartz: 14
Une généralisation du théorème de Céva: 15
Une application de la généralisation du théorème de Céva: 18
Une généralisation d'un théorème de Carnot: 21
Quelques propriétés des médianes: 23
Coefficients k-nomiaux: 24
Une classe d'ensembles récursifs: 27

GENERALITES

Sur quelques progressions: 34
Sur la résolution dans l'ensemble des naturels des équations linéaires: 36
Sur la résolution d'équations du second degré à deux inconnues dans Z : 39
Convergence d'une famille de séries: 41
Des fantaisies mathématiques: 44
La fréquence des lettres (par groupes égaux) dans les textes juridiques roumains: 45
Hypothèses sur la détermination d'une règle pour les jeux de mots croisés: 46
Où se trouve la faute (équations diophantiennes) ?: 48
Où se trouve la faute (sur les intégrales) ? : 50
Où se trouve la faute (dans ce raisonnement par récurrence) ? : 51
Paradoxe mathématique ? : 52

UNE GENERALISATION DE L'INEGALITE DE HÖLDER

On généralise l'inégalité de Hölder grâce à un raisonnement par récurrence. Comme cas particuliers, on obtient une généralisation de l'inégalité de Cauchy-Buniakovski-Schwartz, et des applications intéressantes.

<u>Théorème</u> : Si $a_i^{(k)} \in \mathbb{R}_+$ et $p_k \in]1, +\infty[$, $i \in \{1,2,\ldots,n\}$, $k \in \{1,2,\ldots,m\}$, tels que : $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\ldots+\frac{1}{p_m} = 1$, alors :

$$\sum_{i=1}^{n} \prod_{k=1}^{m} a_i^{(k)} \leqslant \prod_{k=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} \left(a_i^{(k)}\right)^{p_k} \right)^{\frac{1}{p_k}} \quad \text{avec } m \geqslant 2.$$

<u>Preuve</u> : Pour $m = 2$ on obtient justement l'inégalité de Hölder, qui est vraie. On suppose l'inégalité vraie pour les valeurs inférieures strictement à un certain m. Alors :

$$\sum_{i=1}^{n} \prod_{k=1}^{m} a_i^{(k)} = \sum_{i=1}^{n} \left(\left(\prod_{k=1}^{m-2} a_i^{(k)} \right) \cdot \left(a_i^{(m-1)} \cdot a_i^{(m)} \right) \right) \leqslant$$

$$\leqslant \left(\prod_{k=1}^{m-2} \left(\sum_{i=1}^{n} \left(a_i^{(k)}\right)^{p_k} \right)^{\frac{1}{p_k}} \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \left(a_i^{(m-1)} \cdot a_i^{(m)} \right)^{p} \right)^{\frac{1}{p}} ,$$

où $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \ldots + \frac{1}{p_{m-2}} + \frac{1}{p} = 1$ et $p_h > 1$, $1 \leqslant h \leqslant m-2$, $p > 1$;

mais $\sum_{i=1}^{n} \left(a_i^{(m-1)}\right)^p \cdot \left(a_i^{(m)}\right)^p \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\left(a_i^{(m-1)}\right)^p \right)^{t_1} \right)^{\frac{1}{t_1}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\left(a_i^{(m)}\right)^p \right)^{t_2} \right)^{\frac{1}{t_2}}$

où $\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} = 1$ et $t_1 > 1$, $t_2 > 1$. Il en résulte :

$$\sum_{i=1}^{n} \left(a_i^{(m-1)}\right)^p \left(a_i^{(m)}\right)^p \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \left(a_i^{(m-1)}\right)^{pt_1} \right)^{\frac{1}{pt_1}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \left(a_i^{(m)}\right)^{pt_2} \right)^{\frac{1}{pt_2}} ,$$

avec $\frac{1}{pt_1} + \frac{1}{pt_2} = \frac{1}{p}$.

Notons $pt_1 = p_{m-1}$ et $pt_2 = p_m$. Donc $\frac{1}{p_1} + \ldots + \frac{1}{p_m} = 1$, et on a $p_j > 1$ pour $1 \leqslant j \leqslant m$: il en résulte l'inégalité du théorème.

<u>Remarque</u> : Si on pose $p_j = m$ pour $1 \leqslant j \leqslant m$ et si on élève à la puissance m cette inégalité, on obtient une généralisation de l'inégalité de Cauchy-Buniakovski-Schwartz :

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\prod_{k=1}^{m} a_i^{(k)}\right)^m \leqslant \prod_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\left(a_i^{(k)}\right)^m .$$

<u>Application</u> : Soient les réels positifs a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2.
Montrer que :

$$(a_1b_1c_1 + a_2b_2c_2)^6 \leqslant 8\,(a_1^6 + a_2^6)\,(b_1^6 + b_2^6)\,(c_1^6 + c_2^6) .$$

Solution :
Utilisons le théorème antérieur. Posons $p_1=2$, $p_2=3$, $p_3=6$, il en découle que :

$$a_1b_1c_1 + a_2b_2c_2 \leqslant (a_1^2 + a_2^2)^{\frac{1}{2}}\,(b_1^3 + b_2^3)^{\frac{1}{3}}\,(c_1^6 + c_2^6)^{\frac{1}{6}} \text{ , ou encore :}$$

$$(a_1b_1c_1 + a_2b_2c_2)^6 \leqslant (a_1^2 + a_2^2)^3(b_1^3 + b_2^3)^2(c_1^6 + c_2^6) ,$$

et sachant que $(b_1^3 + b_2^3)^2 \leqslant 2(b_1^6 + b_2^6)$

et que $(a_1^2 + a_2^2)^3 = a_1^6 + a_2^6 + 3(a_1^4a_2^2 + a_1^2a_2^4) \leqslant$

$$\leqslant 4(a_1^6 + a_2^6) ,$$

puisque $a_1^4\,a_2^2 + a_1^2a_2^4 \leqslant a_1^6 + a_2^6$ (parce que :

$- (a_2^2 - a_1^2)^2(a_1^2 + a_2^2) \leqslant 0$),

il en résulte l'exercice proposé.

UNE GENERALISATION DE L'INEGALITE DE MINKOWSKI

Théorème : Si p est un nombre réel $\geqslant 1$ et $a_i^{(k)} \in \mathbb{R}^+$, avec $i \in \{1,2,\dots,n\}$ et $k \in \{1,2,\dots,m\}$,alors :

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m} a_i^{(k)}\right)^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{(k)}\right)^p\right)^{1/p}$$

Démonstration par récurrence sur $m \in \mathbb{N}^*$.

Tout d'abord on montre que :

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\left(a_i^{(1)}\right)^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}\left(a_i^{(1)}\right)^p\right)^{1/p}$$

, ce qui est évident et prouve que l'inégalité est vraie pour m=1. (Le cas m=2 constitue justement l'inégalité de Minkowski, qui est naturellement vraie !).

On suppose l'inégalité vraie pour toutes les valeurs inférieures ou égales à m.

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m+1} a_i^{(k)}\right)^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}\left(a_i^{(1)}\right)^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=2}^{m+1} a_i^{(k)}\right)^p\right)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}\left(a_i^{(1)}\right)^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=2}^{m+1}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{(k)}\right)^p\right)^{1/p}$$

et cette dernière somme vaut $\left(\sum_{k=1}^{m+1}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{(k)}\right)^p\right)^{1/p}$.

donc l'inégalité est vraie au rang m+1.

UNE GENERALISATION D'UNE INEGALITE DE TCHEBYCHEV

Enoncé : Si $a_i^{(k)} \geqslant a_{i+1}^{(k)}$, $i \in \{1,2,\dots,n-1\}$, $k \in \{1,2,\dots,m\}$,

alors : $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \prod_{k=1}^{m} a_i^{(k)} \geqslant \frac{1}{n^m} \prod_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} a_i^{(k)}$.

Démonstration par récurrence sur m .

Cas m=1 évident : $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i^{(1)} \geqslant \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i^{(1)}$

Quant au cas m=2, c'est l'inégalité de Tchebychev elle-même:

Si $a_1^{(1)} \geqslant a_2^{(1)} \geqslant \dots \geqslant a_n^{(1)}$ et $a_1^{(2)} \geqslant a_2^{(2)} \geqslant \dots \geqslant a_n^{(2)}$, alors :

$$\frac{a_1^{(1)}a_1^{(2)}+a_2^{(1)}a_2^{(2)}+\dots+a_n^{(1)}a_n^{(2)}}{n} \geqslant \frac{a_1^{(1)}+a_2^{(1)}+\dots+a_n^{(1)}}{n} \times \frac{a_1^{(2)}+\dots+a_n^{(2)}}{n} .$$

On suppose l'inégalité vraie pour toutes les valeurs inférieures ou égales à m. Il faut passer au rang m+1 :

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \prod_{k=1}^{m+1} a_i^{(k)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\prod_{k=1}^{m} a_i^{(k)} \right) . a_i^{(m+1)} .$$

$$\text{Ceci est} \geqslant \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \prod_{k=1}^{m} a_i^{(k)} \right) . \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i^{(m+1)} \right) \geqslant$$

$$\geqslant \left(\frac{1}{n^m} \prod_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} a_i^{(k)} \right) . \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i^{(m+1)} \right)$$

et ceci vaut justement $\frac{1}{n^{m+1}} \prod_{k=1}^{m+1} \sum_{i=1}^{n} a_i^{(k)}$ (cqfd).

UNE GENERALISATION DU THEOREME D' EULER

Dans les paragraphes qui suivent nous allons démontrer un résultat qui remplace le théorème d'Euler :

"Si $(a,m) = 1$, alors $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$ "

dans le cas où a et m ne sont pas premiers entre eux.

A - Notions introductives.

On suppose $m > 0$. Cette supposition ne nuit pas à la généralité, parce que l'indicatrice d'Euler satisfait l'égalité :

$\varphi(m) = \varphi(-m)$ (cf [1]), et que les congruences vérifient la propriété suivante :

$$a \equiv b \pmod{m} \Longleftrightarrow a \equiv b \pmod{-m} \qquad \text{(cf [1] pp 12-13)}.$$

Quant à la relation de congruence modulo 0, c'est la relation d'égalité. On note (a,b) le plus grand commun diviseur de deux nombres entiers a et b, et on choisit $(a,b) > 0$.

B - Lemmes, théorème.

Lemme 1 : Soit a un nombre entier et m un naturel > 0. Il existe d_o, m_o de $\mathbb{N}$ tels que $a = a_o d_o$, $m = m_o d_o$ et $(a_o, m_o) = 1$.

Preuve : il suffit de choisir $d_o = (a,m)$. En conformité avec la définition du PGCD, les quotients a_o et m_o de a et m par leur PGCD sont premiers entre eux (cf [3] pp 25-26).

Lemme 2 : Avec les notations du lemme 1, si $d_o \neq 1$ et si : $d_o = d_o^1 d_1$, $m_o = m_1 d_1$, $(d_o^1, m_1) = 1$ et $d_1 \neq 1$, alors $d_o > d_1$ et $m_o > m_1$, et si $d_o = d_1$, alors après un nombre limité de pas i on a $d_o > d_{i+1} = (d_i, m_i)$.

Preuve :

$$(0) \begin{cases} a = a_o d_o & ; \quad (a_o, m_o) = 1 \\ m = m_o d_o & \quad\ \ d_o \neq 1 \end{cases}$$

$$(1) \begin{cases} d_o = d_o^1 d_1 & ; \quad (d_o^1, m_1) = 1 \\ m_o = m_1 d_1 & \quad\ \ d_1 \neq 1 \end{cases}$$

De (0) et de (1) il résulte que $a = a_o d_o = a_o d_o^1 d_1$ donc $d_o = d_o^1 d_1$ donc $d_o > d_1$ si $d_o^1 \neq 1$.

De $m_o = m_1 d_1$ on déduit que $m_o > m_1$.

Si $d_o = d_1$ alors $m_o = m_1 d_o = k.d_o^{z1}$ ($z \in \mathbb{N}^*$ et $d_o \nmid k$).

Donc $m_1 = k.d_o^{z-1}$; $d_2 = (d_1, m_1) = (d_o, k.d_o^{z-1})$. Après i=z pas il vient $d_{i+1} = (d_o, k) < d_o$.

<u>Lemme 3</u> : Pour chaque nombre entier a et chaque nombre naturel $m > 0$ on peut construire la séquence suivante des relations :

$$(0)\ \begin{cases} a = a_o d_o & ;\ (a_o, m_o) = 1 \\ m = m_o d_o & ;\ d_o \neq 1 \end{cases}$$

$$(1)\ \begin{cases} d_o = d_o^1 d_1 & ;\ (d_o^1, m_1) = 1 \\ m_o = m_1 d_1 & ;\ d_1 \neq 1 \end{cases}$$

....

$$(s-1)\ \begin{cases} d_{s-2} = d_{s-2}^1\, d_{s-1} & ;\ (d_{s-2}^1, m_{s-1}) = 1 \\ m_{s-2} = m_{s-1} d_{s-1} & ;\ d_{s-1} \neq 1 \end{cases}$$

$$(s)\ \begin{cases} d_{s-1} = d_{s-1}^1 d_s & ;\ (d_{s-1}^1, m_s) = 1 \\ m_{s-1} = m_s d_s & ;\ d_s = 1 \end{cases}$$

Preuve : On peut construire cette séquence en appliquant le lemme 1. La séquence est limitée, d'après le lemme 2, car après r_1 pas on a : $d_o > d_{r_1}$ et $m_o > m_{r_1}$, et après r_2 pas on a: $d_{r_1} > d_{r_1+r_2}$ et $m_{r_1} > m_{r_1+r_2}$, etc..., et les m_i sont des naturels. On arrive à $d_s = 1$ parce que si $d_s \neq 1$ on va construire de nouveau un nombre limité de relations $(s+1), \ldots, (s+r)$, avec $d_{s+r} < d_s$.

<u>Théorème</u> : Soient $a, m \in \mathbb{Z}$ et $m \neq 0$. Alors $a^{\varphi(m_s)+s} \equiv a^s \pmod m$ où s et m_s sont les mêmes que dans les lemmes ci-dessus.

Preuve : Comme dans ce qui précède on peut supposer $m > 0$ sans nuire à la généralité. De la séquence de relations du lemme 3 il résulte que :

$$a \overset{(o)}{=} a_o d_o \overset{(1)}{=} a_o d_o^1 d_1 \overset{(2)}{=} a_o d_o^1 d_1^1 d_2 \overset{(3)}{=} \ldots \overset{(s)}{=} a_o d_o^1 d_1^1 \ldots d_{s-1}^1 d_s$$

$$\text{et } m \overset{(0)}{=} m_o d_o \overset{(1)}{=} m_1 d_1 d_o \overset{(2)}{=} m_2 d_2 d_1 d_o \overset{(3)}{=} \ldots \overset{(s)}{=} m_s d_s d_{s-1} \ldots d_1 d_o$$

$$\text{et } m_s d_s d_{s-1} \ldots d_1 d_o = d_o d_1 \ldots d_{s-1} d_s m_s ,$$

De (0) il découle que $d_o = (a,m)$, et de (i) que $d_i = (d_{i-1}, m_{i-1})$, ce pour tout i de $\{1, 2, \ldots, s\}$.

$$\begin{array}{ll} d_o = & d_o^1 d_1^1 d_2^1 \ldots\ldots\ldots\ldots d_{s-1}^1 d_s \\ d_1 = & \quad d_1^1 d_2^1 \ldots\ldots\ldots\ldots d_{s-1}^1 d_s \\ & \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ d_{s-1} = & \qquad\qquad\qquad d_{s-1}^1 d_s \\ d_s = & \qquad\qquad\qquad\qquad d_s \end{array}$$

Donc $d_o d_1 d_2 \ldots d_{s-1} d_s = (d_o^1)^1 (d_1^1)^2 (d_2^1)^3 \ldots (d_{s-1}^1)^s (d_s)^{s+1}$

$= (d_o^1)^1 (d_1^1)^2 (d_2^1)^3 \ldots (d_{s-1}^1)^s$ car $d_s = 1$.

Donc $m = (d_o^1)^1 (d_1^1)^2 (d_2^1)^3 \ldots (d_{s-1}^1)^s . m_s$; donc $m_s \mid m$;

$(d_s, m_s) \overset{(s)}{=} (1, m_s) = 1$ et $(d_{s-1}^1, m_s) \overset{(s)}{=} 1$

$1 \overset{(s-1)}{=} (d_{s-2}^1, m_{s-1}) = (d_{s-2}^1, m_s d_s)$ donc $(d_{s-2}^1, m_s) = 1$

$1 \overset{(s-2)}{=} (d_{s-3}^1, m_{s-2}) = (d_{s-3}^1, m_{s-1} d_{s-1}) = (d_{s-3}^1, m_s d_s d_{s-1})$,

donc $(d_{s-3}^1, m_s) = 1$

....

$1 \overset{(i+1)}{=} (d_i^1, m_{i+1}) = (d_i^1, m_{i+2} d_{i+2}) = (d_i^1, m_{I+3} d_{i+3} d_{i+2}) = \ldots =$

$= (d_i^1, m_s d_s d_{s-1} \ldots d_{i+2})$ donc $(d_i^1, m_s) = 1$, et ce pour tout i de $\{0, 1, \ldots, s-2\}$.

....

$1 \overset{(0)}{=} (a_o, m_o) = (a_o, d_1 \ldots d_{s-1} d_s m_s)$ donc $(a_o, m_s) = 1$.

Du théorème d'Euler il résulte que :

$(d_i^1)^{\varphi(m_s)} \equiv 1 \pmod{m_s}$ pour tout i de $\{0, 1, \ldots, s\}$,

$a_o^{\varphi(m_s)} \equiv 1 \pmod{m_s}$

mais $a^{\varphi(m_s)} = a_o^{\varphi(m_s)} (d_o^1)^{\varphi(m_s)} (d_1^1)^{\varphi(m_s)} \ldots (d_{s-1}^1)^{\varphi(m_s)}$

donc $a^{\varphi(m_s)} \equiv \underbrace{1 \ldots \ldots 1}_{s+1 \text{ fois}} \pmod{m_s}$

$a^{\varphi(m_s)} \equiv 1 \pmod{m_s}$.

$a_o^s . (d_o^1)^{s-1} (d_1^1)^{s-2} (d_2^1)^{s-3} \ldots (d_{s-2}^1)^1 . a^{\varphi(m_s)} \equiv$

$\equiv a_o^s . (d_o^1)^{s-1} (d_1^1)^{s-2} \ldots (d_{s-2}^1)^1 . 1 \pmod{m_s}$.

On multiplie par :

$(d_o^1)^1 (d_1^1)^2 (d_2^1)^3 \ldots (d_{s-2}^1)^{s-1} (d_{s-1}^1)^s$ et on obtient :

$a_o^s (d_o^1)^s (d_1^1)^s \ldots (d_{s-2}^1)^s (d_{s-1}^1)^s a^{\varphi(m_s)} \equiv a_o^s (d_o^1)^s (d_1^1)^s \ldots (d_{s-2}^1)^s (d_{s-1}^1)^s$

$\pmod{(d_o^1)^1 \ldots (d_{s-1}^1)^s m_s}$

mais $a_o^s(d_o^1)^s(d_1^1)^s\ldots(d_{s-1}^1)^s.a^{\varphi(m_s)} = a^{\varphi(m_s)+s}$ et

$a_o^s(d_o^1)^s(d_1^1)^s\ldots(d_{s-1}^1)^s = a^s$ donc $a^{\varphi(m_s)+s} \equiv a^s \pmod m$,

pour tous a, m de $\mathbb{Z}$ $(m \neq 0)$.

Observations :

(1) Si $(a,m) = 1$ alors $d_o=1$. Donc $s = 0$, et d'après le théorème

on a $a^{\varphi(m_o)+0} \equiv a^0 \pmod m$ càd $a^{\varphi(m_o)+0} \equiv 1 \pmod m$.

Mais $m = m_o d_o = m_o.1 = m_o$. Donc :

$a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod m$, et on obtient le théorème d'Euler.

(2) Soient a et m deux nombres entiers, $m \neq 0$ et $(a,m) = d_o \neq 1$,

et $m = m_o d_o$. Si $(d_o,m_o) = 1$, alors $a^{\varphi(m_o)+1} \equiv a \pmod m$.

En effet, vient du théorème avec $s = 1$ et $m_1 = m_o$.

Cette relation a une forme semblable au théorème de Fermat :

$$a^{\varphi(p)+1} \equiv a \pmod p.$$

C - UN ALGORITHME POUR RESOUDRE LES CONGRUENCES.

On va construire un algorithme et montrer le schéma logique permettant de calculer s et m_s du théorème.

Données à entrer : deux nombres entiers a et m, $m \neq 0$.

Résultats en sortie : s et m_s ainsi que $a^{\varphi(m_s)+s} \equiv a^s \pmod m$.

Méthode :
(1) A := a
M := m
i := 0
(2) Calculer $d = (A,M)$ et $M' = M/d$.
(3) Si $d = 1$ prendre $S = i$ et $m_s = M'$; stop.
Si $d \neq 1$ prendre $A := d$, $M := M'$,
$i := i+1$, et aller en (2).

Rem : la correction d'algorithme résulte du lemme 3 et du théoréme.
Voir organigramme page suivante.
Dans cet organigramme, SUBROUTINE CMMDC calcule $D = (A,M)$ et choisit $D > 0$.

Application : Dans la résolution des exercices on utilise le théorème et l'algorithme pour calculer s et m_s.

Exemple : $6^{25604} \equiv ?\ (\text{mod } 105765)$

L'on ne peut pas appliquer Fermat ou Euler car $(6,105765) = 3 \neq 1$.

On applique donc l'algorithme pour calculer s et m_s et puis le théorème antérieur :

$d_o = (6,105765) = 3$ $\quad m_o = 105765/3 = 35255$

$i = 0$; $3 \neq 1$ donc $i = 0 + 1 = 1$, $d_1 = (3,35255) = 1$,

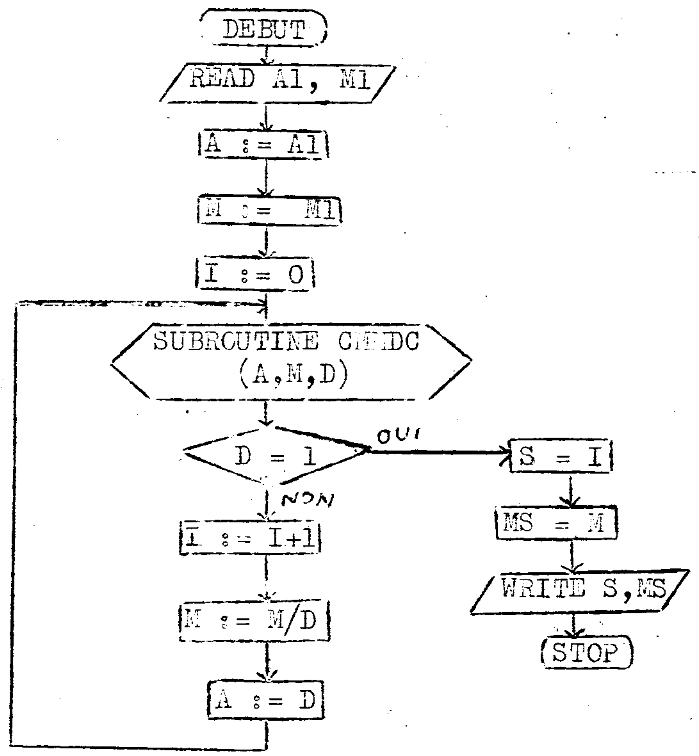
$m_1 = 35255/1 = 35255$.

Donc $6^{\varphi(35255)+1} \equiv 6^{1} \pmod{105765}$ donc

$$6^{25604} \equiv 6^{4} \pmod{105765}.$$

x x x x

Organigramme :



x x x x

BIBLIOGRAPHIE :

[1] Popovici, Constantin P. - "Teoria numerelor",Curs,Bucarest, Editura didactică si pedagogică, 1973.

[2] Popovici, Constantin P. - "Logica si teoria numerelor",Editura didactică si pedagogică, Bucarest, 1970.

[3] Creangă I, Cazacu C, Mihut P, Opait Gh, Reischer Corina - "Introducere în teoria numerelor",Editura didactică si pedagogică, Bucarest, 1965.

[4] Rusu E. - "Arithmetica si teoria numerelor",Editura didactică si pedagogică, Ediția a 2-a, Bucarest, 1963.

UNE GENERALISATION DE L'INEGALITE CAUCHY-BOUNIAKOVSKI-SCHWARTZ

Enoncé : Soient les réels $a_i^{(k)}$, $i\in\{1,2,\dots,n\}$, $k\in\{1,2,\dots,m\}$, avec $m \geqslant 2$. Alors :

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\prod_{k=1}^{m} a_i^{(k)}\right)^2 \leqslant \prod_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\left(a_i^{(k)}\right)^2 .$$

Démonstration. On note A le membre de gauche de l'inégalité et B le membre de droite. On a :

$$A = \sum_{i=1}^{n}\left(a_i^{(1)}\dots a_i^{(m)}\right)^2 + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=i+1}^{n}\left(a_i^{(1)}\dots a_i^{(m)}\right)\left(a_k^{(1)}\dots a_k^{(m)}\right)$$

et $$B = \sum_{(i_1,\dots,i_m)\in E}\left(a_{i_1}^{(1)}\dots a_{i_m}^{(m)}\right)^2 ,$$

où $E = \left\{ (i_1,\dots,i_m) \;/\; i_k\in\{1,2,\dots,n\} ,\ 1\leqslant k\leqslant m \right\}$. D'où :

$$B = \sum_{i=1}^{n}\left(a_i^{(1)}\dots a_i^{(m)}\right)^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=i+1}\left[\left(a_i^{(1)}\dots a_i^{(m-1)}a_k^{(m)}\right)^2 +\right.$$

$$\left. + \left(a_k^{(1)}\dots a_k^{(m-1)}a_i^{(m)}\right)^2\right] + \sum_{\substack{(i_1,\dots,i_m)\in\\ \in E-(\Delta_E\cup L^m)}}\left(a_{i_1}^{(1)}\dots a_{i_m}^{(m)}\right)^2 ,$$

avec $\Delta_E = \{ (\underbrace{\gamma,\dots,\gamma}_{m\ \text{fois}})/\gamma\in\{1,2,\dots,n\}\}$

et $L = \{ (\underbrace{\alpha,\dots,\alpha}_{m-1},\beta),(\underbrace{\beta,\dots,\beta}_{m-1},\alpha)/ (\alpha,\beta)\in\{1,2,\dots,n\}^2 \text{ et } \alpha<\beta\}$.

$$\text{Alors } A-B = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=i+1}^{n}\left[-\left(a_i^{(1)}\dots a_i^{(m-1)}a_k^{(m)} - a_k^{(1)}\dots a_k^{(m-1)}a_i^{(m)}\right)^2\right].$$

$$- \sum_{(i_1,\dots,i_m)\in E-(\Delta_E\cup L)}\left(a_{i_1}^{(1)}\dots a_{i_m}^{(m)}\right)^2 \leqslant 0 .$$

Remarque ; pour m=2 on obtient l'inégalité de Cauchy-Bouniakovski-Schwartz.

GENERALISATIONS DU THEOREME DE CEVA

Dans ces paragraphes on présente trois généralisations du célèbre théorème de Ceva, dont l'énoncé est :
"Si dans un triangle ABC on trace les droites concourantes AA_1, BB_1, CC_1 alors $\frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1C}}\cdot\frac{\overline{B_1C}}{\overline{B_1A}}\cdot\frac{\overline{C_1A}}{\overline{C_1B}} = -1$".

<u>Théorème</u> : Soit le polygone $A_1A_2\ldots A_n$, un point M dans son plan , et une permutation circulaire $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \ldots & n & 1 \end{pmatrix}$. On note M_{ij} les intersections de la droite A_iM avec les droites $A_{i+s}A_{i+s+1}, \ldots, A_{i+s+t-1}A_{i+s+t}$ (pour tous i et j, $j \in \{i+s, \ldots, i+s+t-1\}$).
Si $M_{ij} \neq A_a$ pour tous les indices respectifs, et si $2s+t = n$, on a :

$$\prod_{i,j=1,\,i+s}^{n,\ i+s+t-1} \frac{\overline{M_{ij}A_j}}{\overline{M_{ij}A_{p(j)}}} = (-1)^n \quad \text{(s et t naturels non nuls).}$$

<u>Démonstration analytique</u> : Soit M un point dans le plan du triangle ABC , tel qu'il satisfasse aux conditions du théorème. On choisit un système cartésien d'axes , tel que les deux parallèles aux axes qui passent par M ne passent par aucun point A_i (ce qui est possible).
On considère $M(a,b)$, où a et b sont des variables réelles, et $A_i(X_i,Y_i)$, où X_i et Y_i sont connues , $i \in \{1,2,\ldots,n\}$.
Le choix antérieur nous assure les relations suivantes :
$X_i-a \neq 0$ et $Y_i-b \neq 0$ pour tout i de $\{1,2,\ldots,n\}$.
L'équation de la droite A_iM $(1 \leqslant i \leqslant n)$ est :
$\frac{x-a}{X_i-a} - \frac{y-b}{Y_i-b} = 0$. On la note $d(x,y;X_i,Y_i) = 0$.

$$\text{On a } \frac{\overline{M_{ij}A_j}}{\overline{M_{ij}A_{p(j)}}} = \frac{\delta(A_j,A_iM)}{\delta(A_{p(j)},A_iM)} = \frac{d(X_j,Y_j;X_i,Y_i)}{d(X_{p(j)},Y_{p(j)};X_i,Y_i)} = \frac{D(j,i)}{D(p(j),i)}.$$

Où $\delta(A,ST)$ est la distance de A à la droite ST, et où l'on note $D(a,b)$ pour $d(X_a,Y_a;X_b,Y_b)$.
Calculons le produit , où nous utiliserons la convention suivante : $a+b$ signifiera $\underbrace{p(p(\ldots p}_{b \text{ fois}}(a)\ldots))$ et $a-b$ signifiera $\underbrace{p^{-1}(p^{-1}(\ldots p^{-1}}_{b \text{ fois}}(a)\ldots))$

$$\prod_{j=i+s}^{i+s+t-1} \frac{\overline{M_{ij}A_j}}{\overline{M_{ij}A_{j+1}}} = \prod_{j=i+s}^{i+s+t-1} \frac{D(j,i)}{D(j+1,i)} =$$

$$\frac{D(i+s,i)}{D(i+s+1,i)}\cdot\frac{D(i+s+1,i)}{D(i+s+2,i)}\cdots\frac{D(i+s+t-1,i)}{D(i+s+t,i)} = \frac{D(i+s,i)}{D(i+s+t,i)} = \frac{D(i+s,i)}{D(i-s,i)}.$$

Le produit initial est égal à :

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{D(i+s,i)}{D(i-s,i)} = \frac{D(1+s,1)}{D(1-s,1)} \frac{D(2+s,2)}{D(2-s,2)} \cdots \frac{D(2s,s)}{D(n,s)} \cdot \frac{D(2s+1,s+1)}{D(1,s+1)} \cdot$$

$$\cdot \frac{D(2s+2,s+2)}{D(2,s+2)} \cdots \frac{D(2s+t,s+t)}{D(t,s+t)} \cdot \frac{D(2s+t+1,s+t+1)}{D(t+1,s+t+1)} \cdot \frac{D(2s+t+2,s+t+2)}{D(t+2,s+t+2)} \cdots$$

$$\cdots \frac{D(2s+t+s,s+t+s)}{D(t+s,s+t+s)} = \frac{D(1+s,1)}{D(1,1+s)} \cdot \frac{D(2+s,2)}{D(2,2+s)} \cdots \frac{D(2s+t,s+t)}{D(s+t,2s+t)} \cdots \frac{D(s,n)}{D(n,s)} =$$

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{D(i+s,i)}{D(i,i+s)} = \prod_{i=1}^{n} \left(-\frac{P(i+s)}{P(i)}\right) = (-1)^n$$ parce que :

$$\frac{D(r,p)}{D(p,r)} = \frac{\dfrac{X_r-a}{X_p-a} - \dfrac{Y_r-b}{Y_p-b}}{\dfrac{X_p-a}{X_r-a} - \dfrac{Y_p-b}{Y_r-a}} = -\frac{(X_r-a)(Y_r-b)}{(X_p-a)(Y_p-b)} = -\frac{P(r)}{P(p)} ,$$

la dernière égalité résultant de ce que l'on note : $(X_t-a)(Y_t-b) = P(t)$. De (1) il résulte que $P(t) \neq 0$ pour tout t de $\{1,2,\ldots,n\}$. La démonstration est terminée.

Commentaires sur le théorème :

t représente le nombre des droites du polygone qui sont coupées par une droite $A_{i_o}M$; si on note les côtés A_iA_{i+1} du polygone a_i, alors $s+1$ représente l'ordre de la première droite coupée par la droite A_1M (c'est a_{s+1} la première droite coupée par A_1M).

Exemple : Si $s = 5$ et $t = 3$, le théorème dit que :
- la droite A_1M coupe les côtés A_6A_7, A_7A_8, A_8A_9.
- la droite A_2M coupe les côtés A_7A_8, A_8A_9, A_9A_{10}.
- la droite A_3M coupe les côtés A_8A_9, A_9A_{10}, $A_{10}A_{11}$,

etc...

Observation : la condition restrictive du théorème est nécessaire pour l'existence des rapports $\dfrac{\overline{M_{ij}A_j}}{\overline{M_{ij}A_{p(j)}}}$.

Conséquence 1 : Soient un polygone $A_1A_2\ldots A_{2k+1}$ et un point M dans son plan. Pour tout i de $\{1,2,\ldots,2k+1\}$, on note M_i l'intersection de la droite $A_iA_{p(i)}$ avec la droite qui passe par M et par le sommet opposé à cette droite. Si $M_i \notin \{A_i , A_{p(i)}\}$ alors on a :

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{\overline{M_iA_i}}{\overline{M_iA_{p(i)}}} = -1 .$$

La démonstration résulte immédiatement du théorème, puisqu'on a $s = k$ et $t = 1$, c'est-à-dire $n = 2k+1$.

La réciproque de cette conséquence n'est pas vraie.

D'où il résulte immédiatement que la réciproque du théorème n'est pas non plus vraie.

Contre-exemple :

On considère un polygone de 5 côtés. On trace les droites A_1M_3, A_2M_4 et A_3M_5 concourantes en M.

Soit $K = \dfrac{\overline{M_3A_3}}{\overline{M_3A_4}} \cdot \dfrac{\overline{M_4A_4}}{\overline{M_4A_5}} \cdot \dfrac{\overline{M_5A_5}}{\overline{M_5A_1}}$

Puis on trace la droite A_4M_1 telle qu'elle ne passe pas par M et telle qu'elle forme le rapport : (2)

$\dfrac{\overline{M_1A_1}}{\overline{M_1A_2}} = 1/K$ ou $2/K$. (on choisit l'une de ces valeurs, pour que A_4M_1 ne passe pas par M).

A la fin on trace A_5M_2 qui forme le rapport $\dfrac{\overline{M_2A_2}}{\overline{M_2A_3}} = -1$ ou $-\dfrac{1}{2}$ en fonction de (2). Donc le produit :

$$\prod_{i=1}^{5} \frac{\overline{M_iA_i}}{\overline{M_iA_{p(i)}}} = -1$$ sans que les droites respectives soient concourantes.

Conséquence 2 : Dans les conditions du théorème, si pour tout i et j, $j \notin \{i, p^{-1}(i)\}$, on note $M_{ij} = A_iM \cap A_jA_{p(j)}$, et $M_{ij} \notin \{A_j, A_{p(j)}\}$, alors on a :

$$\prod_{\substack{i,j=1 \\ j \notin \{i, p^{-1}(i)\}}}^{n} \frac{\overline{M_{ij}A_j}}{\overline{M_{ij}A_{p(j)}}} = (-1)^n .$$

En effet on a s=1, t=n-2, et donc 2s+t = n.

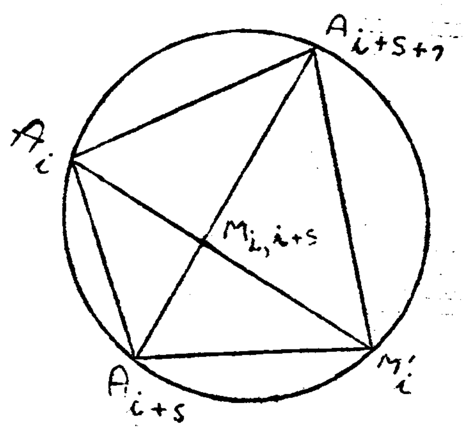
Conséquence 3 : Pour n = 3, il vient s = 1 et t = 1, càd on obtient (comme cas particulier) le théorème de Céva.

UNE APPLICATION DE LA GENERALISATION DU THEOREME DE CEVA

<u>Théorème</u> : Soit un polygone $A_1A_2\ldots A_n$ inscrit dans un cercle. Soient s et t deux naturels non nuls tels que $2s + t = n$. Par chaque sommet A_i passe une droite d_i qui coupe les droites $A_{i+s}A_{i+s+1}, \ldots, A_{i+s+t-1}A_{i+s+t}$ aux points $M_{i,i+s}, \ldots,$ respectivement $M_{i+s+t-1}$, et le cercle au point M'_i. Alors on a :

$$\prod_{i=1}^{n}\ \prod_{j=i+s}^{i+s+t-1} \frac{\overline{M_{ij}A_j}}{\overline{M_{ij}A_{j+1}}} = \prod_{i=1}^{n} \frac{\overline{M'_iA_{i+s}}}{\overline{M'_iA_{i+s+t}}} .$$

<u>Preuve</u> :
Soit i fixé.
1°) Cas où le point $M_{i,i+s}$ se trouve à l'intérieur du cercle :



On a les triangles $A_iM_{i,i+s}A_{i+s}$ et $M'_iM_{i,I+S}A_{i+s+1}$ semblables, puisque les angles $M_{i,i+s}A_iA_{i+s}$ et $M_{i,i+s}A_{i+s+1}M'_i$ d'une part, et $A_iM_{i,i+s}A_{i+s}$ et $A_{i+s+1}M_{i,i+s}M'_i$ sont égaux. Il en résulte que :

$$(1)\ \frac{\overline{M_{i,i+s}A_i}}{\overline{M_{i,i+s}A_{i+s+1}}} = \frac{\overline{A_iA_{i+s}}}{\overline{M'_iA_{i+s+1}}} .$$

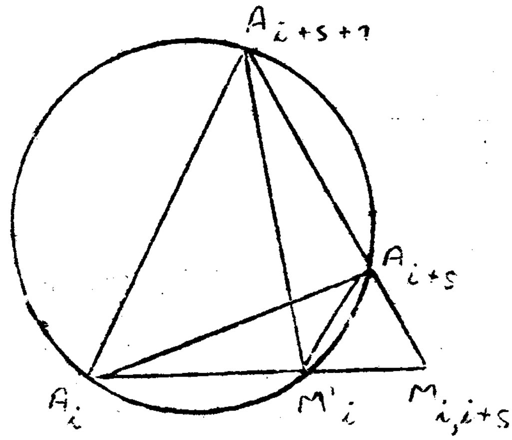
De manière analogue, on montre que les triangles $M_{i,i+s}A_iA_{i+s+1}$ et $M_{i,i+s}A_{i+s}M'_i$ sont semblables, d'où :

$$(2)\ \frac{\overline{M_{i,i+s}A_i}}{\overline{M_{i,i+s}A_{i+s}}} = \frac{\overline{A_iA_{i+s+1}}}{\overline{M'_iA_{i+s}}} .$$

On divise (1) par (2) et on obtient :

$$(3)\ \frac{\overline{M_{i,i+s}A_{i+s}}}{\overline{M_{i,i+s}A_{i+s+1}}} = \frac{\overline{M'_iA_{i+s}}}{\overline{M'_iA_{i+s+1}}} \cdot \frac{\overline{A_iA_{i+s}}}{\overline{A_iA_{i+s+1}}} .$$

2°) Le cas où $M_{i,i+s}$ est extérieur au cercle est similaire au prmier, parce que les triangles (notés comme au 1°) sont semblables aussi dans ce nouveau cas. On a les mêmes raisonnements et les mêmes rapports, donc on a aussi la relation (3).



Calculons le produit :

$$\prod_{j=i+s}^{i+s+t-1} \frac{\overline{M_{ij}A_j}}{\overline{M_{ij}A_{j+1}}} =$$

$$= \prod_{j=i+s}^{i+s+t-1}\left(\frac{\overline{M'_iA_j}}{\overline{M'_iA_{j+1}}}\cdot\frac{\overline{A_iA_j}}{\overline{A_iA_{j+1}}}\right)=$$

$$= \frac{\overline{M'_jA_{i+s}}}{\overline{M'_iA_{i+s+1}}}\cdot\frac{\overline{M'_iA_{i+s+1}}}{\overline{M'_iA_{i+s+2}}}\cdots\frac{\overline{M'_iA_{i+s+t-1}}}{\overline{M'_iA_{i+s+t}}}\cdot$$

$$\cdot\frac{\overline{A_iA_{i+s}}}{\overline{A_iA_{i+s+1}}}\cdot\frac{\overline{A_iA_{i+s+1}}}{\overline{A_iA_{i+s+2}}}\cdots\frac{\overline{A_iA_{i+s+t-1}}}{\overline{A_iA_{i+s+t}}} = \frac{\overline{M'_1A_{i+s}}}{\overline{M'_iA_{i+s+t}}}\cdot\frac{\overline{A_iA_{i+s}}}{\overline{A_iA_{i+s+t}}}.$$

Donc le produit initial est égal à :

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\overline{M'_iA_{i+s}}}{\overline{M'_iA_{i+s+t}}}\cdot\frac{\overline{A_iA_{i+s}}}{\overline{A_iA_{i+s+t}}}\right) = \prod_{i=1}^{n}\frac{\overline{M'_iA_{i+s}}}{\overline{M'_iA_{i+s+t}}},$$

puisque :

$$\prod_{i=1}^{n}\frac{\overline{A_iA_{i+s}}}{\overline{A_iA_{i+s+t}}} = \frac{\overline{A_1A_{1+s}}}{\overline{A_1A_{1+s+t}}}\cdot\frac{\overline{A_2A_{2+s}}}{\overline{A_2A_{2+s+t}}}\cdots\frac{\overline{A_sA_{2s}}}{\overline{A_sA_n}}\cdot\frac{\overline{A_{s+1}A_{2s+1}}}{\overline{A_{s+1}A_1}}\cdot$$

$$\frac{\overline{A_{s+2}A_{2s+2}}}{\overline{A_{s+2}A_2}}\cdots\frac{\overline{A_{s+t}A_n}}{\overline{A_{s+t}A_t}}\cdot\frac{\overline{A_{s+t+1}A_1}}{\overline{A_{s+t+1}A_{t+1}}}\cdot\frac{\overline{A_{s+t+2}A_2}}{\overline{A_{s+t+2}A_{t+2}}}\cdots\frac{\overline{A_nA_s}}{\overline{A_nA_{s+t}}} = 1$$

(en tenant compte du fait que $2s + t = n$).

<u>Conséquence 1</u> : Si on a un polygone $A_1A_2\ldots A_{2s-1}$ inscrit dans un cercle, et que de chaque sommet A_i on trace une droite d_i qui coupe le côté opposé $A_{i+s-1}A_{i+s}$ en M_i, et le cercle en M'_i, alors :

$$\prod_{i=1}^{n}\frac{\overline{M_iA_{i+s-1}}}{\overline{M_iA_{i+s}}} = \prod_{i=1}^{n}\frac{\overline{M'_iA_{i+s-1}}}{\overline{M'_iA_{i+s}}}.$$

En effet pour $t = 1$, on a n impair et $s = \frac{n+1}{2}$.

Si on fait $s = 1$ dans cette conséquence, on retrouve la note mathématique de [1], pages 35-37.

<u>Application</u> : si dans le théorème, les droites d_i sont concourantes, on obtient :

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{\overline{M'_i A_{i+s}}}{\overline{M'_i A_{i+s+t}}} = (-1)^n .$$

(Pour cela, voir [2]).

Bibliographie :

[1] Dan Barbilian, Ion Barbu - "Pagini inedite", Editura Albatros , Bucarest , 1981 (Ediţie ingrijità de Gerda Barbilian, V.Protopopescu, Viorel Gh.Vodă).

[2] Florentin Smarandache - "Généralisations du théorème de Céva".

UNE GENERALISATION D'UN THEOREME DE CARNOT

Théorème de Carnot : Soit un point M sur la diagonale AC d'un quadrilatère quelconque $ABCD$. Par M on trace une droite qui coupe AB en α et BC en β. Puis on trace une autre droite, qui coupe CD en γ et AD en δ. Alors on a :

$$\frac{A\alpha}{B\alpha}\cdot\frac{B\beta}{C\beta}\cdot\frac{C\gamma}{D\gamma}\cdot\frac{D\delta}{A\delta} = 1 .$$

Généralisation : Soit un polygone $A_1\ldots A_n$. Sur une diagonale A_1A_k de celui-ci on prend un point M par lequel on trace une droite d_1 qui coupe les droites $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{k-1}A_k$ respectivement aux points $P_1, P_2, \ldots, P_{k-1}$, et une autre droite d_2 qui coupe les autres droites $A_kA_{k+1}, \ldots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$ respectivement aux points $P_k, \ldots, P_{n-1}, P_n$. Alors on a :

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{A_iP_i}{A_{\varphi(i)}P_i} = 1 ,$$ où φ est la permutation circulaire $\begin{pmatrix}1 & 2 & \ldots & n-1 & n\\ 2 & 3 & \ldots & n & 1\end{pmatrix}$.

Démonstration : Soit $1 \leqslant j \leqslant k-1$. On montre facilement que :

$$\frac{A_jP_j}{A_{j+1}P_j} = \frac{D(A_j,d_1)}{D(A_{j+1},d_1)}$$ où $D(A,d)$ représente la distance du point A à la droite d, puisque les triangles $P_jA_jA'_j$ et $P_jA_{j+1}A'_{j+1}$ sont semblables. (On note A'_j et A'_{j+1} les projections des points A_j et A_{j+1} sur la droite d_1.)

Il en résulte que :

$$\frac{A_1P_1}{A_2P_1}\cdot\frac{A_2P_2}{A_3P_2}\cdots\frac{A_{k-1}P_{k-1}}{A_kP_{k-1}} = \frac{D(A_1,d_1)}{D(A_2,d_1)}\cdot\frac{D(A_2,d_1)}{D(A_3,d_1)}\cdots\frac{D(A_{k-1},d_1)}{D(A_k,d_1)} =$$

$$= \frac{D(A_1,d_1)}{D(A_k,d_1)} .$$

De manière analogue, pour $k \leqslant h \leqslant n$, on a :

$$\frac{A_hP_h}{A_{\varphi(h)}P_h} = \frac{D(A_h,d_2)}{D(A_{\varphi(h)},d_2)} \quad \text{et} \quad \prod_{h=k}^{n}\frac{A_hP_h}{A_{\varphi(h)}P_h} = \frac{D(A_k,d_2)}{D(A_1,d_2)} .$$

Le produit du théorème est égal à :

$$\frac{D(A_1,d_1)}{D(A_k,d_1)}\cdot\frac{D(A_k,d_2)}{D(A_1,d_2)}$$, mais $$\frac{D(A_1,d_1)}{D(A_k,d_1)} = \frac{A_1M}{A_kM}$$ puisque les

triangles $MA_1A'_1$ et $MA_kA'_k$ sont semblables. De même, puisque les triangles $MA_1A''_1$ et $MA_kA''_k$ sont semblables (on note A''_1 et A''_k les projections respectives de A_1 et A_k sur la droite d_2) , on a :

$$\frac{D(A_k,d_2)}{D(A_1,d_2)} = \frac{A_kM}{A_1M} \quad .$$

Le produit de l'énoncé est donc bien égal à 1.

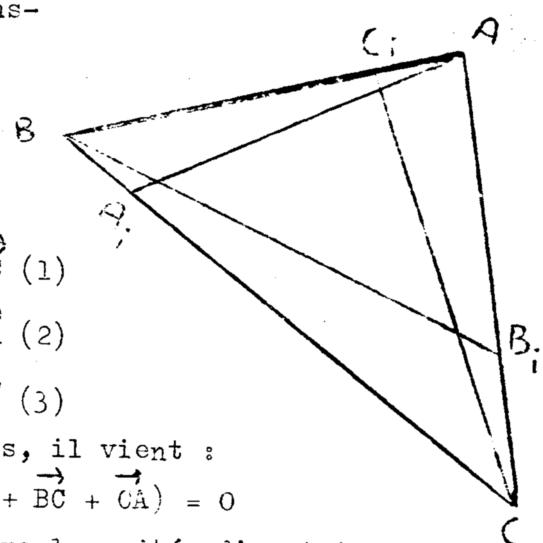
Rem : si on remplace n par 4 dans ce théorème, on retrouve le théorème de Carnot.

QUELQUES PROPRIETES DES MEDIANES

Cet article généralise ceratins résultats sur les médianes (voir [1] p.97-99). On appelle médianes les segments de droite qui passent par un sommet du triangle et partagent le côté opposé en n parties égales. Une médiane est appelée d'ordre i si elle partage le côté opposé dans le rapport i/n.
Pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$, les médianes d'ordre i (c'est-à-dire AA_i, BB_i et CC_i) ont les propriétés suivantes :

1° Avec ces 3 segments on peut construire un triangle.

2° $|AA_i|^2 + |BB_i|^2 + |CC_i|^2 = \dfrac{i^2 - i.n + n^2}{n^2}(a^2+b^2+c^2)$.



Preuves.

$$\overrightarrow{AA_i} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA_i} = \overrightarrow{AB} + \frac{i}{n}\overrightarrow{BC} \quad (1)$$

$$\overrightarrow{BB_i} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB_i} = \overrightarrow{BC} + \frac{i}{n}\overrightarrow{CA} \quad (2)$$

$$\overrightarrow{CC_i} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC_i} = \overrightarrow{CA} + \frac{i}{n}\overrightarrow{AB} \quad (3)$$

En additionnant ces 3 relations, il vient :

$$\overrightarrow{AA_i} + \overrightarrow{BB_i} + \overrightarrow{CC_i} = \frac{i+n}{n}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) = 0$$

donc les 3 médianes peuvent être les côtés d'un triangle.
(2) En élevant au carré les 3 relations et en faisant la somme on obtient :

$$|AA_i|^2 + |BB_i|^2 + |CC_i|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + \frac{i^2}{n^2}(a^2+b^2+c^2) + \\ + \frac{i}{n}(2\,\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} + 2\,\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA} + 2\,\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB}) \quad (4)$$

Puisque $2\,\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = -2\,ca\cos B = b^2-c^2-a^2$ (th. du cosinus) , en reportant ceci dans la relation (4) on a la relation cherchée.

Bibliographie :

[1] Vodă, Dr.Viorel Gh. - "Surprize în matematica elementară", Editura Albatros, Bucarest, 1981.

COEFFICIENTS K-NOMIAUX

Dans cet article on élargit les notions de "coefficients binomiaux" et de "coefficients trinomiaux" à la notion de "coefficients k-nomiaux" et on obtient quelques propriétés générales de ceux-ci. Comme application, on généralisera le "triangle de Pascal".

On considère un nombre naturel $k \geqslant 2$; soit $P(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{k-1}$ le polynôme formé de k monômes de ce type : on l'appellera "k-nôme".

On appelle <u>coefficients k-nomiaux</u> les coefficients des puissances de x de $(1+x+x^2+\ldots+x^{k-1})^n$, pour n entier positif. On les notera Ck_n^h avec $h \in \{0,1,2,\ldots,2pn\}$.

Par la suite on va construire par récurrence un triangle de nombres qui va être appelé <u>"triangle des nombres d'ordre k"</u>.

CAS 1 : $k = 2p + 1$.

Sur la première ligne du triangle on écrit 1 et on l'appelle "ligne 0".

(1) On convient que toutes les cases qui se trouvent à gauche et à droite du premier (respectivement du dernier) nombre de chaque ligne seront considérées comme contenant 0. Les lignes suivantes sont appelées "ligne 1", "ligne 2", etc... Chaque ligne contiendra 2P nombres de plus que la précédente : p nombres à gauche du premier nombre, p nombres à droite du dernier nombre de la ligne précédente. Les nombres de la ligne i+1 s'obtiennent à partir de ceux de la ligne i de la façon suivante :

Ck_{i+1}^j est égal à l'addition des p nombres situés à sa gauche sur la ligne i et des p nombres situés à sa droite sur la ligne i, au nombre situé au-dessus de lui (voir fig.1). On va tenir compte de la convention 1.

Fig.1 : ligne i $\quad \overbrace{\bullet\cdots\cdots\bullet}^{p\text{ nombres}}\ \circ\ \overbrace{\bullet\cdots\cdots\bullet}^{p\text{ nombres}}$

ligne i+1 $\quad \bullet Ck_{i+1}^j$

<u>Exemple</u> pour k=5 :

1
1 1 1 1 1
1 2 3 4 5 4 3 2 1
1 3 6 10 15 18 19 18 15 10 6 3 1
1 4 10 20 35 52 68 80 85 80 68 52 35 20 10 4 1
....

Le nombre $C5_1^0 = 0+0+0+0+1 = 1$; $C5_1^3 = 0+1+0+0+0 = 1$,
$C5_2^3 = 0+1+1+1+1 = 4$; $C5_3^7 = 4+5+4+3+2 = 18$, etc...

Propriétés du triangle de nombres d'ordre k :

1) La ligne i a 2pi+1 éléments.

2) $Ck_n^h = \sum_{i=0}^{2p} Ck_{n-1}^{h-i}$ où par convention $Ck_n^t = 0$ pour $\begin{cases} t < 0 \text{ et} \\ t > 2pr \end{cases}$.

Ceci est évident d'après la construction du triangle.

3) Chaque ligne est symétrique par rapport à l'élément central.

4) Les premiers éléments de la ligne i sont 1 et i.

5) La ligne i du triangle de nombres d'ordre k représente les coefficients k-nomiaux de $(1 + x + x^2 + \ldots + x^{k-1})^i$.

La démonstration se fait par récurrence sur i de N^* :

a) Pour i=1 c'est évident; (en fait la propriété serait encore vraie pour i=0).

b) Supposons la propriété vraie pour n. Alors

$$(1+x+x^2+\ldots+x^{k-1})^{n+1} = (1+x+x^2+\ldots+x^{k-1})(1+x+x^2+\ldots+x^{k-1})^n$$

$$= (1+x+x^2+\ldots+x^{2p}).\sum_{j=0}^{2pn} Ck_n^j.x^j = \sum_{t=0}^{2p(n+1)} \sum_{\substack{i+j=t \\ 0 \leqslant j \leqslant 2p \\ 0 \leqslant i \leqslant 2pn}} Ck_n^i.x^i.x^j$$

$$= \sum_{t=0}^{2p(n+1)} \left(\sum_{j=0}^{2p} Ck_n^{t-j} \right) x^t = \sum_{t=0}^{2p(n+1)} Ck_{n+1}^t.x^t .$$

6) La somme des éléments situés sur la ligne n est égale à k^n.

La première méthode de démonstration utilise le raisonnement par récurrence. Pour n=1 l'assertion est évidente. On suppose la propriété vraie pour n, c'est-à-dire que la somme des éléments situés sur la ligne n est égale à k^n. La ligne n+1 se calcule à partir des éléments de la ligne n. Chaque élément de la ligne n fait partie de la somme qui calcule chacun des p éléments situés à sa gauche sur la ligne n+1, chacun des p éléments situés à sa droite sur la ligne n+1 et celui qui est situé en dessous : donc il est utilisé pour calculer k nombres de la ligne n+1.

Donc la somme des éléments de la ligne n+1 est k fois plus grande que la somme de ceux de la ligne n,

donc elle vaut k^{n+1}.

7) La différence entre la somme des coefficients k-nomiaux de rang pair et la somme des coefficients k-nomiaux de rang impair situés sur la même ligne $(Ck_n^0 - Ck_n^1 + Ck_n^2 - Ck_n^3 + \ldots)$ est égale à 1.

On l'obtient si dans $(1+x+x^2+\ldots+x^{k-1})^n$ on prend x = -1.

8) $Ck_n^0.Ck_m^h + Ck_n^1.Ck_m^{h-1} + \ldots + Ck_n^h.Ck_m^0 = Ck_{n+m}^h$

Ceci résulte de ce que, dans l'identité

$$(1+x+x^2+\ldots+x^{k-1})^n.(1+x+x^2+\ldots+x^{k-1})^m = (1+x+x^2+\ldots+x^{k-1})^{n+m}$$

le coefficient de x^h dans le membre de gauche est $\sum_{i=0}^{h} Ck_n^i . Ck_m^{h-i}$

et celui de x^h à droite est Ck_{n+m}^h.

9) La somme des carrés des coefficients k-nomiaux situés sur la ligne n est égale au cefficient k-nomial situé au milieu de la ligne 2n.
Pour la preuve on prend n=m=h dans la propriété 8.

On peut trouver beaucoup de propriétés et applications de ces coefficients k-nomiaux parce qu'ils élargissent les coefficients binomiaux dont les applications sont connues.

CAS 2 : k = 2p.

La construction du triangle de nombres d'ordre k est analogue :
Sur la première ligne on écrit 1 ; on l'appelle ligne 0.
Les lignes suivantes sont appelées ligne 1, ligne 2, etc... Chaque ligne aura 2p-1 éléments de plus que la précédente ; comme 2p-1 est un nombre impair, les éléments de chaque ligne seront placés entre les éléments de la ligne précédente (à la différence du cas 1 où ils se plaçaient en-dessous).
Les éléments situés sur la ligne i+1 s'obtiennent en utilisant ceux de la ligne i de la façon suivante :
Ck_{i+1}^j est égal à l'addition des p éléments situés à sa gauche sur la ligne i aux p éléments situés à sa droite sur la ligne i. (Fig.2).

Fig.2 : ligne i $\quad \overbrace{\circ \cdots \circ}^{p \text{ nbres}}\ \overbrace{\circ \cdots \circ}^{p \text{ nbres}}$
ligne i+1 $\quad \circ\ Ck_{i+1}^j$

Exemple pour k=4 :

1
1 1 1 1
1 2 3 4 3 2 1
1 3 6 10 12 12 10 6 3 1
1 4 10 20 31 40 44 40 31 20 10 4 1
....

D'où la propriété 1' : $Ck_n^h = \sum_{i=0}^{2p-1} Ck_{n-1}^{h-i}$.

En réunissant les propriétés 1 et 1' : $Ck_n^h = \sum_{i=0}^{k-1} Ck_{n-1}^{h-i}$.

Les autres propriétés du Cas 1 se conservent dans le cas 2, avec des preuves analogues. Cependant dans la propriété 7, on voit que la différence entre la somme des coefficients k-nomiaux de rang pair et celle des coefficients k-nomiaux de rang impair situés sur la même ligne est égale à 0.

UNE CLASSE D'ENSEMBLES RECURSIFS

Dans cet article on construit une classe d'ensembles récursifs, on établit des propriétés de ces ensembles et on propose des applications. Cet article élargit quelques résultats de [1] .

1) Définitions, propriétés.

On appelle ensembles récursifs les ensembles d'éléments qui se construisent de manière récursive ; soit T un ensemble d'éléments et f_i pour i compris entre 1 et s, des opérations n_i-aires ,càd que $f_i : T^{n_i} \longrightarrow T$. Construisons récursivement l'ensemble M inclus dans T et tel que :

(déf.1) 1°) certains éléments $a_1, \ldots, a_n$ de T, appartiennent à M.

2°) si $\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_{n_i}}$ appartiennent à M, alors $f_i(\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i n_i})$ appartient à M pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$.

3°) chaque élément de M s'obtient en appliquant un nombre fini de fois les règles 1° ou 2°.

Nous allons démontrer plusieurs propriétés de ces ensembles M, qui découlent de la façon dont ils ont été définis.
L'ensemble M est le représentant d'une classe d'ensembles récursifs parce que dans les règles 1° et 2°, en particularisant les éléments $a_1, \ldots, a_n$, respectivement $f_1, \ldots, f_s$, on obtient des ensembles différents.

Observation 1 : Pour obtenir un élément de M, il faut nécessairement appliquer d'abord la règle 1.

(déf.2) Les éléments de M s'appellent éléments M-récursifs.
(déf.3) On appelle ordre d'un élément a de M le plus petit naturel $p \geq 1$ qui a la propriété que a s'obtient en appliquant p fois les règles 1° ou 2°.
On note M_p l'ensemble qui contient tous les éléments d'ordre p de M. Il est évident que $M_1 = \{a_1, \ldots, a_n\}$.

$$M_2 = \bigcup_{i=1}^{s} \left\{ \bigcup_{(\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_{n_i}}) \in M_1^{n_i}} f_i(\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_{n_i}}) \right\} \setminus M_1 .$$

On soustrait M_1 car il est possible que $f_j(a_{j_1}, \ldots, a_{j_{n_j}}) = a_i$ qui appartient à M_1, et donc pas à M_2.

On démontre que pour $k \geq 1$ on a :

$$M_{k+1} = \bigcup_{i=1}^{s} \left\{ \bigcup_{(\alpha_{i_1},\ldots,\alpha_{i_{n_i}}) \in \Pi_k^{(i)}} f_i(\alpha_{i_1},\ldots,\alpha_{i_{n_i}}) \right\} \setminus \bigcup_{h=1}^{k} M_h$$

où chaque $\Pi_k^{(i)} = \left\{ (\alpha_{i1},\ldots,\alpha_{i_{n_i}}) \,/\, \alpha_{i_j} \in M_{q_j} \quad j \in \{1,2,\ldots,n_i\} ;\right.$

$\left. 1 \leqslant q_j \leqslant k \text{ et au moins un élément } \alpha_{i_{j_0}} \in M_k ,\ 1 \leqslant j_0 \leqslant n_i \right\}$.

Les ensembles M_p , $p \in \mathbb{N}^*$, forment une partition de l'ensemble M.

Théorème 1 : $M = \bigcup_{p \in N^*} M_p$, où $N^* = \{1,2,3,\ldots\}$.

Preuve. De la règle 1° il résulte que $M_1 \subseteq M$.

On suppose que cette propriété est vraie pour des valeurs inférieures à p. Il en résulte que $M_p \subseteq M$, parce que M_p est obtenu en appliquant la règle 2° aux éléments de $\bigcup_{i=1}^{p-1} M_i$.

Donc $\bigcup_{p \in N^*} M_p \subseteq M$. Réciproquement , on a l'inclusion en sens contraire en accord avec la règle 3°.

Théorème 2 : L'ensemble M est le plus petit ensemble qui ait les propriétés 1° et 2°.

Preuve : soit R le plus petit ensemble ayant les propriétés 1° et 2°. On va démontrer que cet ensemble est unique. Supposons qu'il existe un autre ensemble R' ayant les propriétés 1° et 2° et qui soit le plus petit. Comme R est le plus petit ensemble ayant ces propriétés, et puisque R' les possède aussi, il en résulte que $R \subseteq R'$; de manière analogue, il vient $R' \subseteq R$: donc $R = R'$.
Il est évident que $M_1 \subseteq R$. On suppose que $M_i \subseteq R$ pour $1 \leqslant i < p$. Alors (règle 3°), et en tenant compte du fait que chaque élément de M_p est obtenu en appliquant la règle 2° à certains éléments de M_i , $1 \leqslant i < p$, il en résulte que $M_p \subseteq R$. Donc $\bigcup_p M_p \subseteq R$ ($p \in N^*$), càd $M \subseteq R$. Et comme R est unique, $M = R$.

Observation 2. Le théorème 2 remplace la règle 3° de la définition récursive de l'ensemble M par : "M est le plus petit ensemble satisfaisant les propriétés 1° et 2° ".

Théorème 3 : M est l'intersection de tous les ensembles de T qui satisfont aux conditions 1° et 2°.

Preuve : soit T_{12} la famille de tous les ensembles de T satisfaisant les conditions 1° et 2°. Soit $I = \bigcap_{A \in T_{12}} A$.

I a les propriétés 1° et 2° parce que :
1) Pour tout $i \in \{1,2,\ldots,n\}$, $a_i \in I$, parce que $a_i \in A$ pour tout A de T_{12}.

2) Si $\alpha_{i_1},\dots,\alpha_{i_{n_i}} \in I$, il en résulte que $\alpha_{i_1},\dots,\alpha_{i_{n_i}}$ appartiennent à A quel que soit A de T_{12}. Donc, $\forall i \in \{1,2,\dots,s\}$ $f_i(\alpha_{i_1},\dots,\alpha_{i_{n_i}}) \in A$ quel que soit A de T_{12}, donc $f_i(\alpha_{i_1},\dots,\alpha_{i_{n_i}}) \in I$ pour tout i de $\{1,2,\dots,s\}$.

Du théorème 2 il résulte que $M \subseteq I$.

Puisque M remplit les conditions 1° et 2°, il en résulte que $M \in T_{12}$, d'où $I \subseteq M$. Donc $M = I$.

Déf.) Un ensemble $A \subseteq I$ est dit fermé pour l'opération f_{i_0} ssi pour tout $\alpha_{i_0 1},\dots,\alpha_{i_0 n_{i_0}}$ de A, on a : $f_{i_0}(\alpha_{i_0 1},\dots,\alpha_{i_0 n_{i_0}})$ appartient à A.

(Déf.5) Un ensemble $A \subseteq T$ est dit fermé M-récursif ssi :

1) $\{a_1,\dots,a_n\} \subseteq A$.

2) A est fermé par rapport aux opérations $f_1,\dots,f_s$.

Avec ces définitions, les théorèmes précédents deviennent :

Théorème 2' : L'ensemble M est le plus petit ensemble fermé M-récursif.

Théorème 3' : M est l'intersection de tous les ensembles fermés M-récursifs.

(Déf.6) Le système d'éléments $\langle \alpha_1,\dots,\alpha_m \rangle$, $m \geqslant 1$ et $\alpha_i \in T$ pour $i \in \{1,2,\dots,m\}$, constitue une description M-récursive pour l'élément α, si $\alpha_m = \alpha$ et que chaque α_i ($i \in \{1,2,\dots,m\}$) satisfait au moins l'une des propriétés :

1) $\alpha_i \in \{a_1,\dots,a_n\}$.

2) α_i s'obtient à partir des éléments qui le précèdent dans le système en appliquant les fonctions f_j, $1 \leqslant j \leqslant s$, définies par la propriété 2° de (déf.1).

(Déf.7) Le nombre m de ce système s'appelle la longueur de la description M-récursive pour l'élément α.

Observation 3 : Si l'élément α admet une description M-récursive, alors il admet une infinité de telles descriptions.

En effet, si $\langle \alpha_1,\dots,\alpha_m \rangle$ est une description M-récursive de α, alors $\langle \underbrace{a_1,\dots,a_1}_{h\ \text{fois}}, \alpha_1,\dots,\alpha_m \rangle$ est aussi une description M-récursive pour α, h pouvant prendre toute valeur de N.

Théorème 4 : L'ensemble M est confondu avec l'ensemble de tous les éléments de T qui admettent une description M-récursive.

Preuve : soit D l'ensemble de tous les éléments qui admettent une description M-récursive. Nous allons démontrer par récurrence que $M_p \subseteq D$ pour tout p de N^*.

Pour $p = 1$ on a : $M_1 = \{a_1,\dots,a_n\}$, et les a_j, $1 \leqslant j \leqslant n$,

admettent comme description M-récursive : $\langle a_j \rangle$. Ainsi $M_1 \subseteq D$. Supposons que la propriété est vraie pour les valeurs inférieures à p. M_p est obtenu en appliquant la règle 2° aux éléments de $\bigcup_{i=1}^{p-1} M_i$; $\alpha \in M_p$ entraîne $\alpha \in f_i(\alpha_{i1},\dots,\alpha_{in_i})$ et $\alpha_{ij} \in M_{h_j}$ pour $h_j < p$ et $1 \leqslant j \leqslant n_i$.
Mais α_{ij}, $1 \leqslant j \leqslant n_i$, admet des descriptions M-récursives d'après l'hypothèse de récurrence, soit $\langle \beta_{j1},\dots,\beta_{js_j} \rangle$.

Alors $\langle \beta_{11},\dots,\beta_{1s_1},\beta_{21},\dots,\beta_{2s_2},\dots,\beta_{n_i1},\dots,\beta_{n_is_{n_i}},\alpha \rangle$ constitue une description M-récursive pour l'élément α.
Donc si α appartient à D, alors $M_p \subseteq D$, càd $M = \bigcup_{p \in N^*} M_p \subseteq D$.

Réciproquement, soit x appartenant à D. Il admet une description M-récursive $\langle b_1,\dots,b_t \rangle$ avec $b_t = x$. Il en résulte par récurrence sur la longueur de la description M-récursive de l'élément x , que $x \in M$. Pour t = 1 , on a $\langle b_1 \rangle$, $b_1 = x$,et $b_1 \in \{a_1,\dots,a_n\} \subseteq M$. On suppose que tous les éléments y de D qui admettent une description M-récursive de longueur inférieure à t appartiennent à M. Soit $x \in D$, décrit par un système de longueur t : $\langle b_1,\dots,b_t \rangle$, $b_t = x$. Alors $x \in \{a_1,\dots,a_n\} \subseteq M$, ou bien x est obtenu en appliquant la règle 2° aux éléments qui le précèdent dans le système : $b_1,\dots,b_{t-1}$. Mais ces éléments admettent des descriptions M-récursives de longueurs inférieures à t : $\langle b_1 \rangle$, $\langle b_1,b_2 \rangle,\dots,\langle b_1,\dots,b_{t-1} \rangle$. D'après l'hypothèse de récurrence, $b_1,\dots,b_{t-1}$ appartiennent à M.

Donc b_t appartient aussi à M. Il en résulte que $M \equiv D$.

Théorème 5 : Soient $b_1,\dots,b_q$ des éléments de T qui s'obtiennent à partir des éléments $a_1,\dots,a_n$ en appliquant un nombre fini de fois les opérations $f_1,f_2,\dots$, ou f_s. Alors M peut être défini récursivement de la façon suivante :

1) Certains éléments $a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_q$ de T appartiennent à M.
2) M est fermé pour les applications f_i ,avec $i \in \{1,2,\dots,s\}$.
3) Chaque élément de M est obtenu en appliquant un nombre fini de fois les règles (1) ou (2) qui précèdent.

Preuve : évidente. Comme $b_1,\dots,b_q$ appartiennent à T, et s'obtiennent à partir des éléments $a_1,\dots,a_n$ de M en appliquant un nombre fini de fois les opérations f_i, il en résulte que $b_1,\dots,b_q$ appartiennent à M.

Théorème 6 : Soient g_j , $1 \leqslant j \leqslant r$, des opérations n_j-aires , càd $g_j : T^{n_j} \longrightarrow T$, telles que M soit fermé par rapport à ces opérations. Alors M peut être défini récursivement de la façon suivante :

1) Certains éléments $a_1,\ldots,a_n$ de T appartiennent à M.
2) M est fermé pour les opérations f_i , $i \in \{1,2,\ldots,s\}$ et g_j , $j \in \{1,2,\ldots,r\}$.
3) Chaque élément de M est obtenu en appliquant un nombre fini de fois les règles précédentes.

Preuve facile : comme M est fermé pour les opérations g_j (avec $j \in \{1,2,\ldots,r\}$), on a , quels que soient $\alpha_{j1},\ldots,\alpha_{jn_j}$ de M , $g_j(\alpha_{j1},\ldots,\alpha_{jn_j}) \in M$ pour tout $j \in \{1,2,\ldots,r\}$.

Les théorèmes 5 et 6 entraînent :

Théorème 7 : L'ensemble M peut être défini récursivement de la façon suivante :

1) Certains éléments $a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_q$ de T appartiennent à M.
2) M est fermé pour les opérations f_i ($i \in \{1,2,\ldots,s\}$) et pour les opérations g_j ($j \in \{1,2,\ldots,r\}$) définies précédemment.
3) Chaque élément de M est défini en appliquant un nombre fini de fois les 2 règles précédentes.

Déf.8) L'opération f_i conserve la propriété P ssi quels que soient les éléments $\alpha_{i1},\ldots,\alpha_{in_i}$ ayant la propriété P, $f_i(\alpha_{i1},\ldots,\alpha_{in_i})$ a la propriété P.

Théorème 8 : Si $a_1,\ldots,a_n$ ont la propriété P, et si les fonctions $f_1,\ldots,f_s$ conservent cette propriété, alors tous les éléments de M ont la propriété P.

Preuve : $M = \bigcup_{p \in N^*} M_p$. Les éléments de M_1 ont la propriété P.

Supposons que les éléments de M_i pour $i < p$ ont la propriété P. Alors les éléments de M_p l'ont aussi parce que M_p s'obtient en appliquant les opérations $f_1,\ldots,f_s$ aux éléments de : $\bigcup_{i=1}^{p-1} M_i$, éléments qui ont la propriété P. Donc, quel que qoit p de N , les éléments de M_p ont la propriété P . Donc tous les éléments de M l'ont.

Conséquence 1 : Soit la propriété P : "x peut être représenté sous la forme F(x) ".

Si $a_1,\ldots,a_n$ peuvent être représentés sous la forme $F(a_1),\ldots,$ respectivement $F(a_n)$, et si $f_1,\ldots,f_s$ conservent la propriété P, alors tout élément α de M peut être représenté sous la forme $F(\alpha)$.

Rem : on peut trouver encore d'autres déf. équivalentes de M.

2 - APPLICATIONS , EXEMPLES .

Dans les applications, certaines notions générales comme : élément M-récursif, description M-récursive, ensemble fermé M-récursif seront remplacés par les attributs caractérisant l'ensemble M. Par exemple dans la théorie des fonctions récursives, on trouve des notions comme : fonctions primitives récursives, description primitive récursive, ensemble fermé primitivement récursif. Dans ce cas "M" a été remplacé par l'attribut "primitif" qui caractérise cette classe de fonctions, mais il peut être remplacé par les attributs "général", "partiel".

En particularisant les règles 1° et 2° de la déf.1 , on obtient plusieurs ensembles intéressants :

<u>Exemple 1</u> : (voir [2] , pages 120-122, problème 7.97).

<u>Exemple 2</u> : L'ensemble des termes d'une suite définie par une relation de récurrence constitue un ensemble récursif.
Soit la suite : $a_{n+k} = f(a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+k-1})$, pour tout n de N^* , avec $a_i = a_i^\circ$, $1 \leqslant i \leqslant k$. On va construire récursivement l'ensemble $A = \{a_m\}_{m \in N^*}$ et on va définir en même temps la position d'un élément dans l'ensemble A :

1°) $a_1^\circ, \ldots, a_k^\circ$ appartiennent à A, et chaque a_i° $(1 \leqslant i \leqslant k)$ occupe la position i dans l'ensemble A ;

2°) si $a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+k-1}$ appartiennent à A , et chaque a_j , pour $n \leqslant j \leqslant n+k-1$, occupe la position j dans l'ensemble A , alors $f(a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+k-1})$ appartient à A et occupe la position $n+k$ dans l'ensemble A.

3°) chaque élément de B s'obtient en appliquant un nombre fini de fois les règles 1° **ou** 2°.

<u>Exemple 3</u> : Soit $G = \{e, a^1, a^2, \ldots, a^p\}$ un groupe cyclique engendré par l'élément a. Alors $(G, .)$ peut être défini récursivement de la façon suivante :

1°) a appartient à G.

2°) si b et c appartiennent à G alors b.c appartiennent à G.

3°) chaque élément de G est obtenu en appliquant un nombre fini de fois les règles 1 ou 2.

<u>Exemple 4</u> : Chaque ensemble fini $ML = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ peut être défini récursivement (avec $ML \subseteq T$) :

1°) Les éléments $x_1, \ldots, x_n$ de T appartiennent à ML.

2°) Si a appartient à ML , alors f(a) appartient à **ML**, où $f: T \longrightarrow T$ telle que $f(x) = x$;

3°) Chaque élément de ML est obtenu en appliquant un nombre fini de fois les règles 1° ou 2°.

<u>Exemple 5</u> : Soit L un espace vectoriel sur le corps commutatif K et $\{x_1, \ldots, x_m\}$ une base de L. Alors L peut être défini récursivement de la façon suivante :

1°) $x_1,\dots,x_m$ appartiennent à L ;

2°) si x, y appartiennent à L et si a appartient à K, alors $x \perp y$ appartient à L et $a * x$ appartient à L.

3°) chaque élément de L est obtenu récursivement en appliquant un nombre fini de fois les règles 1° ou 2°.

(Les lois $\perp$ et $*$ sont respectivement les lois interne et externe de l'espace vectoriel L).

Exemple 6 : Soient X un A-module, et $M \subset X$ ($M \neq \emptyset$), avec $M = \{x_i\}_{i \in I}$. Le sous-module engendré par M est :
$\langle M \rangle = \{x \in X \,/\, x = a_1x_1 + \dots + a_nx_n,\ a_i \in A,\ x_i \in M,\ i \in \{1,\dots,n\}\}$
peut être défini récursivement de la façon suivante :

1°) pour tout i de $\{1,2,\dots,n\}$, $x_i \in \langle M \rangle$;

2°) si x et y appartiennent à $\langle M \rangle$ et a appartient à A, alors $x + y$ appartient à $\langle M \rangle$, et ax aussi ;

3°) chaque élément de $\langle M \rangle$ est obtenu en appliquant un nombre fini de fois les règles 1° ou 2°.

En accord avec le paragraphe 1 de cet article, $\langle M \rangle$ est le plus petit sous-ensemble de X vérifiant les conditions 1° et 2°, c'est-à-dire que $\langle M \rangle$ est le plus petit sous-module de X incluant M. $\langle M \rangle$ est aussi l'intersection de tous les sous-ensemebles de X vérifiant les conditions 1° et 2°, c'est-à-dire que $\langle M \rangle$ est l'intersection de tous les sous-modules de X qui contiennent M. On retrouve ainsi directement quelques résultats classiques d'algèbre.
On peut aussi parler de sous-groupes ou d'idéal engendré par un ensemble : on obtient ainsi quelques applications importantes en algèbre.

Exemple 7 : On obtient aussi comme application la théorie des langages formels, parce que, comme on le sait, chaque langage régulier (linéaire à droite) est un ensemble régulier et réciproquement. Mais un ensemble régulier sur un alphabet $\Sigma = \{a_1,\dots,a_n\}$ peut être défini récursivement de la façon suivante :

1°) $\emptyset$, $\{\varepsilon\}$, $\{a_1\}$, ..., $\{a_n\}$ appartiennent à R.

2°) si P et Q appartiennent à R, alors $P \cup Q$, PQ, et P^* app. à R, avec $P \cup Q = \{x / x \in P \text{ ou } x \in Q\}$; $PQ = \{xy / x \in P \text{ et } y \in Q\}$, et
$P^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} P^n$ avec $P^n = \underbrace{P.P\dots P}_{n \text{ fois}}$ et, par convention, $P^0 = \{\varepsilon\}$.

3°) Rien d'autre n'appartient à R que ce qui est obtenu à l'aide de 1° ou de 2°.
D'où plusieurs propriétés de cette classe de langages avec applications aux langages de programmation.

Bibliographie:

[1] C.P.Popovici, L.Livovschi, H.Georgescu, N.Ţăndăreanu - "Curs de bazele informaticii (funcţii booleene şi circuite combinaţionale)", Tipografia Universitaţii din Bucarest, 1976.

[2] F.Smarandache - "Problèmes avec et sans... problèmes !" - Somipress, Fès (Maroc), 1983.

SUR QUELQUES PROGRESSIONS

Dans cet article on construit des ensembles qui ont la propriété suivante : quel que soit leur partage en deux sous-ensembles, au moins l'un de ces sous-ensembles contient au moins trois éléments en progression arithmétique (ou bien géométrique).

<u>Lemme 1</u> : L'ensemble des nombres naturels ne peut pas être partagé en deux sous-ensembles ne contenant ni l'un ni l'autre 3 nombres en progression arithmétique.

Supposons le contraire, et soient M_1 et M_2 les deux sous-ensembles. Soit $k \in M_1$.

a) Si $k+1 \in M_1$, alors $k-1$ et $k+2$ sont dans M_2, sinon on pourrait construire une progression arithmétique dans M_1. Pour la même raison, puisque $k-1$ et $k+2$ sont dans M_2, alors $k-4$ et $k+5$ sont dans M_1. Donc :

$k+1$ et $k+5$ sont dans M_1 donc $k+3$ est dans M_2 ;

$k-4$ et k sont dans M_1 donc $k+4$ est dans M_2 ;

on a obtenu que M_2 contient $k+2$, $k+3$ et $k+4$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

b) si $k+1 \notin M_1$ alors $k+1 \in M_2$. Analysons l'élément $k-1$.

Si $k-1 \in M_1$; on est dans le cas (a) où deux éléments consécutifs appartiennent au même ensemble.

Si $k-1 \in M_2$. Alors, puisque $k-1$ et $k+1$ sont dans M_2, il en résulte que $k-3$ et $k+3 \notin M_2$, donc $\in M_1$. Mais on obtient la progression arithmétique $k-3$, k, $k+3$ dans M_1, contradiction.

<u>Lemme 2</u> : Si on met à part un nombre fini de termes de l'ensemble des entiers naturels, l'ensemble obtenu garde encore la propriété du lemme 1.

Dans le lemme 1, le choix de k était arbitraire, et pour chaque k on obtenait, au moins dans l'un des ensembles M_1 ou M_2, un triplet d'éléments en progression arithmétique : donc au moins un de ces deux ensembles contient une infinité de tels triplets.

Si on met à part un nombre fini de naturels, on met aussi à part un nombre fini de triplets en progression arithmétique. Mais l'un au moins des deux ensembles M_1 ou M_2 conservera un nombre infini de triplets en progression arithmétique.

<u>Lemme 3</u> : Si $i_1, \dots, i_s$ sont des naturels en progression arithmétique,
et si $a_1, a_2, \dots$ est une progression arithmétique (respectivement géométrique), alors $a_{i_1}, \dots, a_{i_s}$ est aussi une progression arithmétique (respectivement géométrique).

Démonstration : pour chaque j on a : $2i_j = i_{j-1} + i_{j+1}$.

a) Si $a_1, a_2, \dots$ est une progression arithmétique de raison r:

$$2a_{i_j} = 2\,(a_1+(i_j-1)r) = (a_1+(i_{j-1}-1)r) + (a_1+(i_{j+1}-1)r)$$
$$= a_{i_{j-1}} + a_{i_{j+1}} .$$

b) Si $a_1, a_2, \dots$ est une progression géométrique de raison r :

$$(a_{i_j})^2 = (a.r^{i_j-1})^2 = a^2.r^{2i_j-2} = (a.r^{i_{j-1}-1}).(a.r^{i_{j+1}-1}).$$
$$= a_{i_{j-1}}.a_{i_{j+1}} .$$

Théorème 1 : N'importe la manière dont on partage l'ensemble des termes d'une progression arithmétique (respectivement géométrique) en 2 sous-ensembles : dans l'un au moins de ces sous-ensembles il y aura au moins 3 termes en progression arithmétique (respectivement géométrique).

Démonstration : D'après le lemme 3, il suffit d'étudier le partage de l'ensemble des indices des termes de la progression en 2 sous-ensembles, et d'analyser l'existence (ou non) d'au moins 3 indices en progression arithmétique dans l'un de ces sous-ensembles.

Mais l'ensemble des indices des termes de la progression est l'ensemble des nombres naturels, et on a démontré au lemme 1 qu'il ne peut pas être partagé en 2 sous-ensembles sans qu'il y ait au moins 3 nombres en progression arithmétique dans l'un de ces sous-ensembles : le théorème est démontré.

Théorème 2 : Un ensemble M qui contient une progression arithmétique (respectivement géométrique) infinie, non constante, conserve la propriété du théorème 1.

En effet, cela découle directement du fait que tout partage de M implique le partage des termes de la progression.

Application : Quelle que soit la façon dont on partage l'ensemble $A = \{1^m, 2^m, 3^m, \dots\}$ $(m \in R)$ en 2 sous-ensembles, au moins l'un de ces sous-ensembles contient 3 termes en progression géométrique.

(Généralisation du problème O:255 de la "Gazeta Matematica", Bucarest, n°10/1981, p.400).

La solution résulte naturellement du théorème 2, si on remarque que A contient la progression géom. $a_n = (2^m)^n$, $(n \in N^*)$.

De plus on peut démontrer que dans l'un au moins des sous-ensembles il y a une infinité de triplets en progression géométrique, parce que A contient une infinité de progressions géométriques differentes : $a_n^{(p)} = (p^m)^n$ avec p premier et $n \in N^*$, auxquelles on peut appliquer les théorèmes 1 et 2.

SUR LA RESOLUTION DANS L'ENSEMBLE DES NATURELS DES EQUATIONS LINEAIRES

L'utilité de cet article est qu'il établit si le nombre des solutions naturelles d'une équation linéaire est limité ou non. On expose aussi une méthode de résolution en nombres entiers de l'équation $a\,x - b\,y = c$ (qui représente une généralisation des lemmes 1 et 2 de [4]), un exemple de résolution d'équation à 3 inconnues, et quelques considérations sur la résolution en nombres entiers naturels des équations à n inconnues.

Soit l'équation :

$$(1)\ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = b \quad \text{avec tous les } a_i, b \text{ dans } Z,\ a_i \neq 0, \text{ et } (a_1,\ldots,a_n)=d.$$

<u>Lemme 1</u> : L'équation (1) admet au moins une solution dans l'ensemble des entiers, si d divise b.

Ce résultat est classique.

Dans (1), on ne nuit pas à la généralité en preant $(a_1,\ldots,a_n) = 1$, parce que dans le cas où $d \neq 1$ on divise l'équation par ce nombre ; si la division n'est pas entière, alors l'équation n'admet pas de solutions naturelles.

Il est évident que chaque équation linéaire homogène admet des solutions dans N : au moins la solution banale !

PROPRIETES SUR LE NOMBRE DE SOLUTIONS NATURELLES D'UNE EQUATION LINEAIRE GENERALE.

On va introduire la notion suivante :

<u>Déf.1</u> : L'équation (1) a des variations de signe s'il y a au moins deux coefficients a_i, a_j avec $1 \leqslant i,j \leqslant n$, tels que $a_i \cdot a_j < 0$.

<u>Lemme 2</u> : Une équation (1) qui a des variations de signe admet une infinité de solutions naturelles (généralisation du lemme 1 de [4]).

Preuve : De l'hypothèse du lemme résulte que l'équation a h termes positifs non nuls, $1 \leqslant h \leqslant n$, et $k = n-h$ termes négatifs non nuls. On a $1 \leqslant k \leqslant n$. On suppose que les h premiers termes sont positifs et les k suivants négatifs.

On peut alors écrire :

$$\sum_{t=1}^{h} a_t x_t - \sum_{j=h+1}^{n} a'_j x_j = b \quad \text{où } a'_j = -a_j > 0.$$

Soit $0 < M = [a_1,\ldots,a_n]$ et $c_i = \left|M/a_i\right|$, $i \in \{1,2,\ldots,n\}$.

Soit aussi $0 < P = [h,k]$, et $h_1 = P/h$ et $k_1 = P/k$.

$$\text{Prenant } \begin{cases} x_t = h_1 c_t \cdot z + x_t^o, & 1 \leqslant t \leqslant h, \\ x_j = k_1 c_j \cdot z + x_j^o, & h+1 \leqslant j \leqslant n, \end{cases}$$

où $z \in N$, $z \geqslant \max_{t,j} \left\{ \left[\dfrac{-x_t^o}{h_1 c_t}\right], \left[\dfrac{x_j^o}{k_1 c_j}\right] \right\} + 1$,

et x_i^o , $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ une solution particulière entière (qui existe d'après le lemme 1), on obtient une infinité de solutions dans l'ensemble des naturels pour l'équation (1).

Lemme 3 : a) Une équation (1) qui n'a pas de variation de signe a au maximum un nombre limité de solutions naturelles.
b) Dans ce cas, pour $b \neq 0$, constant, l'équation a le nombre maximum de solutions si et seulement si $a_i = 1$ pour $i \in \{1,2,\ldots,n\}$.

Preuve (voir aussi [6]).

a) On considère tous les $a_i > 0$ (dans le cas contraire, multiplier l'équation par -1).

Si $b < 0$, il est évident que l'équation n'a aucune solution (dans N).

Si $b = 0$, l'équation admet seulement la solution banale.

Si $b > 0$, alors chaque inconnue x_i prend des valeurs entières positives comprises entre 0 et $b/a_i = d_i$ (fini) , et pas nécessairement toutes ces valeurs. Donc le nombre maximum de solutions est inférieur ou égal à :

$$\prod_{i=1}^{n} (1+d_i) \quad \text{qui est fini.}$$

b) Pour $b \neq 0$, constant, $\prod_{i=1}^{n} (1+d_i)$ est maximum ssi les d_i sont maximums, càd ssi $a_i=1$ pour tout i de $\{1,2,\ldots,n\}$.

Théorème 1 : L'équation (1) admet une infinité de solutions naturelles si et seulement si elle a des variations de signe.

Ceci résulte naturellement de ce qui précède.

Méthode de résolution.

Théorème 2 : Soit l'équation à coefficients entiers $ax - by = c$, où a et $b > 0$ et $(a,b) = 1$. Alors la solution générale en nombres naturels de cette équation est :

$$\begin{cases} x = bk + x_0 \\ y = ak + y_0 \end{cases}$$ où (x_0,y_0) est une solution particulière entière de l'équation ,

et $k \geq \max\left\{ [-x_0/b] , [-y_0/a] \right\}+1$ est un paramètre entier (généralisation du lemme 2 de [4]).

Preuve. Il résulte de [1] que la solution générale entière de l'équation est $\begin{cases} x = bk + x_0 \\ y = ak + y_0 \end{cases}$ où (x_0,y_0) est une solution particulière entière de l'équation et $k \in Z$. Puisque x et y sont des entiers naturels , il nous faut imposer des conditions à k, d'où la suite du théorème.

SYSTEMATISONS ! Pour résoudre dans l'ensemble des naturels une équation linéaire à n inconnues on utilise les résultats antérieurs de la façon suivante ;

a) Si l'équation n'a pas de variation de signe, comme elle a un nombre limité de solutions naturelles, la résolution est faite par épreuves (voir aussi [6]).

b) Si elle a des variations de signe et que b divisible par d, alors elle admet une infinité de solutions naturelles. On détermine

d'abord sa solution générale entière (voir [2] , [5]):

$$x_i = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_{ij} k_j + \beta_i \quad , 1 \leqslant i \leqslant n, \text{ où tous les } \alpha_{ij}, \beta_i \in Z$$

et les k_j sont des paramètres entiers.

En appliquant la restriction $x_i \geqslant 0$ pour tout i de $\{1,2,\dots,n\}$, on détermine les conditions qui doivent être réalisées par les paramètres entiers k_j pour tout j de $\{1,2,\dots,n-1\}$. (c)

Le cas n = 2 et n = 3 peut être traité par cette méthode, mais quand n augmente, les conditions (c) deviennent de plus en plus difficiles à trouver.

<u>Exemple</u> : Résoudre dans N l'équation $3x - 7y + 2z = -18$.

Sol. : dans Z on obtient la solution générale entière :

$$\begin{cases} x = k_1 \\ y = k_1 + 2k_2 \\ z = 2k_1 + 7k_2 - 9 \end{cases} \quad \text{avec } k_1 \text{ et } k_2 \text{ dans Z.}$$

Les conditions (c) résultent des inégalités $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$. Il en résulte $k_1 \geqslant 0$, et aussi $k_2 \geqslant [-k_1/2] + 1$ et $k_2 \geqslant [(9-2k_1)/7] + 1$, c'est-à-dire $k_2 \geqslant [(2-2k_1)/7] + 2$.

Avec ces conditions sur k_1 et k_2, on a la solution générale en nombres naturels de l'équation.

BIBLIOGRAPHIE :

[1] Creangă I.,Cazacu C.,Mihuţ P., Opaiţ Gh., Reisher, Corina - "Introducere în teoria numerelor ", Editura didactică şi pedagogică, Bucarest, 1965.

[2] Ion D., Ion, Niţă C. - "Elemente de aritmetică cu aplicaţii in tehnici de calcul" , Editura tehnică, Bucarest, 1978.

[3] Popovici C.P. - "Logica şi teoria numerelor" , Editura didactică şi pedagogică, Bucarest, 1970.

[4] Andrica, Dorin şi Andreescu, Titu - "Existenţa unei soluţii de bază pentru ecuaţia $ax^2 - by^2 = 1$" , Gazeta Matematică, n° 2/1981.

[5] Smarandache, Florentin Gh. - "Un algorithme de résolution ds l'ensemble des nombres entiers des équations linéaires" ,Analele Universităţii din Craiova, 1981.

[6] Smarandache, Florentin Gh. - Problema E : 6919, G.M 7/1980.

SUR LA RESOLUTION D'EQUATIONS DU SECOND DEGRE A DEUX INCONNUES DANS Z

Propriété 1 : L'équation $x^2-y^2 = c$ admet des solutions entières si et seulement si c appartient à 4Z ou est impair.

Preuve : l'équation $(x-y)(x+y) = c$ admet des solutions dans Z ssi il existe c_1 et c_2 de Z tels que $x-y = c_1$, $x+y = c_2$, et $c_1c_2 = c$. D'où $x = \frac{c_1+c_2}{2}$ et $y = \frac{c_2-c_1}{2}$. Mais x et y sont des entiers ssi $c_1+c_2 \in 2Z$, $c_2-c_1 \in 2Z$, c'est-à-dire :

1) ou bien c_1 et c_2 sont impairs, d'où c impair (et réciproquement).

2) ou bien c_1 et c_2 sont pairs, d'où $c \in 4Z$. Réciproquement, si $c \in 4Z$, alors on peut décomposer c en deux facteurs c_1 et c_2 pairs, et tels que $c_1c_2 = c$.

Remarque 1 :
La propriété 1 est vraie aussi pour la résolution dans N, puisqu'on peut supposer $c \geqslant 0$ (dans le cas contraire, on multiplie l'équation par (-1)), et on prend $c_2 \geqslant c_1 \geqslant 0$, d'où $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$.

Propriété 2 : L'équation $x^2 - dy^2 = c^2$ (où d n'est pas un carré parfait), admet une infinité de solutions dans N.

Preuve : soient $x = ck_1$, $k_1 \in N$ et $y = ck_2$, $k_2 \in N$, $c \in N$.

Il en résulte que $k_1^2 - dk_2^2 = 1$, où l'on reconnaît l'équation de Pell-Fermat, qui admet une infinité de solutions dans N, (u_n, v_n). Alors $x_n=cu_n$, $y_n=cv_n$ constituent une infinité de solutions naturelles de notre équation.

Propriété 3 : L'équation $ax^2-by^2 = c$ $(\neq 0)$, où $ab = k^2$ $(k \in Z)$, admet un nombre fini de solutions naturelles.

Preuve : on peut considérer a,b,c comme des nombres positifs : dans le cas contraire, on multiplie éventuellement l'équation par (-1) et on change le nom des variables. Multiplions l'équation par a, on aura :

$z^2-t^2 = d$ avec $z = ax \in N$, $t = ky \in N$ et $d = ac > 0$. (1)

On résout comme dans la propriété 1, ce qui donne z et t. Mais dans (1) on a un nombre fini de solutions naturelles, parce qu'il existe un nombre fini de diviseurs entiers pour un nombre de N^*. Comme les couples (z,t) sont en nombre limité, bien sûr les couples (z/a,t/k) aussi, ainsi que les couples (x,y).

<u>Propriété 4</u> : Si $ax^2-by^2 = c$, où $ab \neq k^2$ $(k \in Z)$, admet une solution particulière non triviale dans N, alors elle admet une infinité de solutions dans N.

Preuve : on pose :

$$(2) \begin{cases} x_n = x_0 u_n + b y_0 v_n \\ y_n = y_0 u_n + a x_0 v_n \end{cases} \qquad (n \in N)$$

où (x_0, y_0) est la solution particulière naturelle pour l'équation initiale, et $(u_n, v_n)_{n \in N}$ est la solution générale naturelle pour l'équation : $u^2-abv^2 = 1$, nommée la résolvante Pell, qui admet une infinité de solutions.

Alors $ax_n^2-by_n^2 = (ax_0^2-by_0^2)(u_n^2-abv_n^2) = c$.

Donc (2) vérifie l'équation initiale.

CONVERGENCE D'UNE FAMILLE DE SERIES

Dans cet article, on construit une famille d'expressions $\mathcal{E}(n)$. Pour chaque élément $E(n)$ de $\mathcal{E}(n)$, la convergence de la séerie $\sum_{n=n_E} E(n)$ pourra être décidée d'après les théorèmes de l'article. L'article donne aussi des applications.

(1) Préliminaire .

Pour rendre l'expression plus aisée, nous utiliserons les fonctions récursives. Quelques notations et notions seront introduites pour simplifier et réduire la matière de cet article.

(2) Définitions ; lemmes.

Nous construisons récursivement une famille d'expressions $\mathcal{E}(n)$. Pour chaque expression $E(n) \in \mathcal{E}(n)$, le degré de l'expression est défini récursivement et noté $d°E(n)$, et son coefficient dominant est noté $c(E(n))$.

1. Si a est une constante réelle, alors $a \in \mathcal{E}(n)$.
   $d°a = 0$ et $c(a) = a$.
2. L'entier positif $n \in \mathcal{E}(n)$.
   $d°n = 1$ et $c(n) = 1$.
3. Si $E_1(n)$ et $E_2(n)$ appartiennent à $\mathcal{E}(n)$, avec $d°E_1(n) = r_1$ et $d°E_2(n) = r_2$, $c(E_1(n)) = a_1$ et $c(E_2(n)) = a_2$, alors :

   a) $E_1(n)E_2(n) \in \mathcal{E}(n)$; $d°(E_1(n)E_2(n)) = r_1+r_2$; $c(E_1(n)E_2(n))$ vaut a_1a_2.

   b) si $E_2(n) \neq 0$ $\forall n \in N$ $(n \geqslant n_{E_2})$, alors $\frac{E_1(n)}{E_2(n)} \in \mathcal{E}(n)$ et $d°\left(\frac{E_1(n)}{E_2(n)}\right) = r_1 - r_2$, $c\left(\frac{E_1(n^2)}{E_2(n)}\right) = \frac{a_1}{a_2}$.

   c) Si :
   α est un réel constant et si l'opération utilisée a un sens $(E_1(n))^{\alpha}$ (pr. tt. $n \in N$, $n \geqslant n_{E_1}$), alors $(E_1(n))^{\alpha} \in \mathcal{E}(n)$, $d°((E_1(n))^{\alpha}) = r_1\alpha$, $c((E_1(n))^{\alpha}) = a_1^{\alpha}$.

   d) Si $r_1 \neq r_2$, alors $E_1(n) \pm E_2(n) \in \mathcal{E}(n)$, $d°(E_1(n) \pm E_2(n))$ est le max de r_1 et r_2, et $c(E_1(n) \pm E_2(n)) = a_1$, respectivement a_2, suivant que le degré est r_1 ou r_2.

   e) si $r_1 = r_2$ et $a_1+a_2 \neq 0$, alors $E_1(n)+E_2(n) \in \mathcal{E}(n)$, $d°(E_1(n)+E_2(n)) = r_1$ et $c(E_1(n)+E_2(n)) = a_1+a_2$.

   f) Si $r_1 = r_2$ et $a_1-a_2 \neq 0$, alors $E_1(n)-E_2(n) \in \mathcal{E}(n)$, $d°(E_1(n)-E_2(n)) = r_1$ et $c(E_1(n)-E_2(n)) = a_1-a_2$.

4. Toute expression obtenue par application un nombre fini de fois du pas 3 appartient à $\mathcal{E}(n)$.

Note 1. De la définition de $\mathcal{E}(n)$ il résulte que, si $E(n) \in \mathcal{E}(n)$, alors $c(E(n)) \neq 0$ et que $c(E(n)) = 0$ si et seulement si $E(n) \equiv 0$.

Lemme 1. Si $E(n) \in \mathcal{E}(n)$ et $c(E(n)) > 0$, alors il existe $n' \in N$, tel que pour tout $n > n'$, $E(n) > 0$.

Preuve : soit $c(E(n)) = a_1 > 0$ et $d°(E(n)) = r$.

Si $r > 0$, alors $\lim_{n \to \infty} E(n) = \lim_{n \to \infty} n^r \frac{E(n)}{n^r} =$

$= \lim_{n \to \infty} a_1 n^r = +\infty$, donc il existe $n' \in N$ tel que, qqst $n \geqslant n'$ on ait $E(n) > 0$.

Si $r < 0$, alors $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{E(n)} = \lim_{n \to \infty} \frac{n^{-r}}{\frac{E(n)}{n^r}} = \frac{1}{a_1} \lim_{n \to \infty} n^{-r} = +\infty$

donc il existe $n' \in N$, tel que pour tout $n \geqslant n'$, $\frac{1}{E(n)} > 0$,

ou encore $E(n) > 0$.

Si $r = 0$, alors ou bien $E(n)$ est une constante réelle positive,

ou bien $\frac{E_1(n)}{E_2(n)} = E(n)$, avec $d°E_1(n) = d°E_2(n) = r_1 \neq 0$, et d'après ce que nous venons de voir, $c\left(\frac{E_1(n)}{E_2(n)}\right) = \frac{c(E_1(n))}{c(E_2(n))} =$

$= c(E(n)) > 0$. Alors :

* ou bien $c(E_1(n)) > 0$ et $c(E_2(n)) > 0$: il en résulte

$$\left.\begin{array}{l} \text{il existe } n_{E1} \in N, \forall n \in N \text{ et } n \geqslant n_{E1},\ E_1(n) > 0 \\ \text{il existe } n_{E2} \in N, \forall n \in N \text{ et } n \geqslant n_{E2},\ E_2(n) > 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

il existe $n_E = \max(n_{E1}, n_{E2}) \in N, \forall n \in N, n \geqslant n_E, E(n) = \frac{E_1(n)}{E_2(n)} > 0$.

* ou bien $c(E_1(n)) < 0$ et $c(E_2(n)) < 0$ et alors :

$E(n) = \frac{E_1(n)}{E_2(n)} = \frac{-E_1(n)}{-E_2(n)}$, ce qui nous ramène au cas précédent.

Lemme 2. Si $E(n) \in \mathcal{E}(n)$ et $c(E(n)) < 0$, alors il existe $n' \in N$, tel que qqst $n > n'$, $E(n) < 0$.

Preuve : l'expression $-E(n)$ a la propriété que $c(-E(n)) > 0$, d'après la définition récursive. D'après le lemme 1 : il existe $n' \in N, \forall n \in N, n \geqslant n'$, $-E(n) > 0$, c'est-à-dire $+E(n) < 0$, cqfd.

Note 2. Pour prouver le théorème suivant, nous supposons connu le critère de convergence des séries et certaines propriétés de ces derrnières.

(3) Théorème de convergence et applications.

Théorème : soit $E(n) \in \mathcal{E}(n)$ avec $d°E(n) = r$ et soit les séries $\sum_{n \geqslant n_E} E(n)$, $E(n) \not\equiv 0$. Alors :

A) si $r < -1$ la série est absolument convergente.
B) si $r \geq -1$ elle est divergente où $E(n)$ a un sens $\forall n \geq n_E$, $n \in N$.

Preuve : d'après les lemmes 1 et 2, et parce que :

la série $\sum_{n \geq n_E} E(n)$ converge $\iff$ la série $-\sum_{n \geq n_E} E(n)$ converge, nous pouvons considérer la série $\sum_{n \geq n_E} E(n)$ comme une série à termes positifs. Nous allons prouver que la série $\sum_{n \geq n_E} E(n)$ a la même nature que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{-r}}$. Appliquons le second critère de comparaison :

$\lim_{n \to \infty} \frac{E(n)}{\frac{1}{n^{-r}}} = \lim_{n \to \infty} \frac{E(n)}{n^r} = c(E(n)) \neq \pm\infty$. D'après la note 1 si $E(n) \not\equiv 0$ alors $c(E(n)) \neq 0$ et donc la série $\sum_{n \geq nE} E(n)$ a la même nature que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{-r}}$, c'est-à-dire :

A) si $r < -1$, alors la série est convergente ;
B) si $r > -1$, alors la série est divergente.

Pour $r < -1$, la série est absolument convergente car c'est une série à termes positifs.

<u>Applications</u> : On peut en trouver beaucoup. En voici quelques-unes intéressantes :

Si $P_q(n)$, $R_s(n)$ sont des polynômes en n de degré q, s, et que $P_q(n)$ et $R_s(n)$ appartiennent à $\mathcal{E}(n)$:

1°) $\sum_{n \geq n_{PR}} \frac{\sqrt[k]{P_q(n)}}{\sqrt[h]{R_s(n)}}$ est $\begin{cases} \text{convergent, si } s/h - q/k > 1 \\ \text{divergent , si } s/h - q/k \leq 1 . \end{cases}$

2°) $\sum_{n \geq n_R} \frac{1}{R_s(n)}$ est $\begin{cases} \text{convergent, si } s > 1 \\ \text{divergent, si } s \leq 1 . \end{cases}$

<u>Exemple</u> : la série $\sum_{n \geq 2} \frac{\sqrt[2]{n+1} \cdot \sqrt[3]{n-7} + 2}{\sqrt[5]{n^2} - 17}$ est divergente parce que $\frac{2}{5} - (1/2+1/3) < 1$, et si on appelle $E(n)$ chaque quotient de cette série, $E(n)$ appartient à $\mathcal{E}(n)$ et a un sens pour $n \geq 2$.

DES FANTAISIES MATHEMATIQUES

Trouvez une "logique" aux énoncés suivants :

(1) $4 - 5 \approx 5$!
(2) 8 divisé par deux est égal à zéro !
(3) 10 moins 1 égale 0. !
(4) $\reflectbox{$\int$} \int f(x)\, dx = f(x)$!
(5) $8 + 8 = 8$!

Solutions :

Ces fantaisies mathématiques sont des divertissements, des problèmes amusants : elles font abstraction de la logique courante, mais elles ont quand même <u>leur</u> "logique" , une logique fantaisiste : ainsi

(1) s'explique si l'on ne considère pas "4 - 5" comme l'écriture de "4 moins 5" mais comme celle de "de 4 à 5" ; d'où une lecture de l'énoncé "$4-5 \approx 5$" : "entre 4 et 5, mais plus près de 5".

(2) 8 peut être divisé par deux... de la façon suivante : ~~8~~ , c'est-à-dire qu'il sera coupé en deux parties égales, qui sont égales à "0" au-dessus et au-dessous de la barre !

(3) "10 moins 1" peut s'entendre comme : les deux caractères typographiques 1,0 moins le 1, ce qui justifie qu'il reste le caractère 0.

(4) Le signe $\reflectbox{$\int$}$ sera considéré comme la fonction inverse de l'intégrale.

(5) L'opération "$\infty + \infty = \infty$" est vraie : on va l'écrire verticalement :

$$\begin{array}{c} \infty \\ + \\ \infty \\ = \\ \infty \end{array}$$

ce qui, transposé horizontalement (par une rotation mécanique des signes graphiques), donnera bien l'énoncé : "8 + 8 = 8".

LA FREQUENCE DES LETTRES (PAR GROUPES EGAUX) DANS LES TEXTES JURIDIQUES ROUMAINS

Analysant le degré de détérioration des touches d'une machine à écrire qui a fonctionné plus de 40 ans au greffe d'un tribunal d'un district roumain (Vilcea), on les a réparties dans les groupes suivants :

1) Lettres complètement détériorées (on ne peut plus rien lire sur la touche).
2) Lettres dont on voit un seul point, à peine perceptible.

....

10) Lettres dont il manque un seul point.
11) Lettres qui se voient parfaitement, sans aucun manque.
12) Lettres qui, n'étant presque pas utilisées, étaient couvertes de poussière.

On a obtenu les résultats suivants :

1)	E, A	7)	O,C,U,D,Z
2)	I	8)	N
3)	R	9)	L
4)	T	10)	V,M
5)	S	11)	F,G,B,H,X,J,K
6)	P	12)	W,Q,Y

Cette classification est un peu différente de celle de [1], parce que les lettres A, Ă, Â sont ici cumulées en une seule lettre : A, de même I et Î dans I, S et Ş dans S, T et Ţ dans T.
En étudiant l'écart de ces textes (cf. [2]), on obtient :

$$\alpha(j) = \frac{1}{23}\sum_{i=1}^{23} \left| \alpha(A_i) \right| \approx 2,348 ,$$

donc l'écart du langage juridique des fréquences courantes de la langue est beaucoup plus grand que celui du langage des mots croisés : $\alpha(g) \approx 1,391$ et $\alpha(d_r) \approx 1,185$.

Les sauts les plus spectaculaires sont réalisés par les lettres P, Z et N :

$$\alpha(P) = 6 , \quad \alpha(Z) = 7 , \quad \alpha(N) = -8.$$

Cet article surprend peut-être par sa banalité. Mais, alors que les autres auteurs ont fait des mois de calculs à l'aide d'ordinateurs, choisissant certains livres et faisant compter les lettres (!) par l'ordinateur, moi j'ai déduit cette fréquence des lettres en quelques minutes (!), par une simple observation.

Bibliographie:

[1] Marcus, Solomon - "Poetica matematică", Editura Academiei, Bucarest, 1970 (traduit en allemand, Athenäum, Frankfurt, 1973).

[2] Smarandache, Florentin - "A mathematical linguistic approach to Rebus", article publié dans la revue "Revue Roumaine de linguistique", Tome XXVIII, 1983, la collection "Cahiers de linguistique théorique et appliquée", Tome XX, 1983, n°1, p.67-76, Bucarest.

HYPOTHESES SUR LA DETERMINATION D'UNE REGLE POUR LES JEUX DE MOTS CROISES

Les problèmes de mots croisés sont composés, on le sait, de grilles et de définitions. Dans la langue roumaine on impose la condition que le pourcentage de cases noires par rapport au nombre total de cases de la grille ne dépasse pas 15 %.
Pourquoi 15 % , et pas plus ou moins ? C'est la question à laquelle cet article tente de répondre. (Cette question est dûe au Professeur Solomon MARCUS - symposium national de Mathématiques "Traian Lalesco", Université de Craïova, 10 juin 82.)

Voici tout d'abord un tableau qui présente de manière synthétique une statistique sur les grilles contenant un très faible pourcentage de cases noires (cf. [2] , pages 27-29):

LES GRILLES-RECORDS:

Dimension de la grille	Nombre minimum de cases noires enregistré	Pourcentage de cases noires	Nombre des grilles-records réalisées au 1 juin 82
8 x 8	0	0,000 %	24
9 x 9	0	0,000 %	3
10 x 10	3	3,000 %	2
11 x 11	4	3,305 %	1
12 x 12	8	5,555 %	1
13 x 13	12	7,100 %	1
14 x 14	14	7,142 %	1
15 x 15	17	7,555 %	1
16 x 16	20	7,812 %	2

Dans ce tableau, plus la dimension est grande, plus le pourcentage de cases noires augmente, parce que le nombre de mots de grande longueur est réduit.
Les dimensions courantes des grilles vont de 10x10 à 15x15.
On peut remarquer que le nombre des grilles ayant un pourcentage de cases noires inférieur à 8 % est très réduit : les totaux de la dernière colonne cumulent toutes les grilles réalisées en Roumanie depuis 1925 (apparition des premiers problèmes de mots croisés en Roumanie) , jusqu'à nos jours. On voit donc que le nombre des grilles-records est négligeable quand on le compare aux milliers de grilles créées. Pour cette raison, la règle qui imposait le pourcentage des cases noires, devait l'établir supérieur à 8 %.

Mais les mots croisés étant des jeux, devaient gagner un large public, il ne fallait donc pas rendre les problèmes trop difficiles. D'où un pourcentage de cases noires au moins égal à 10 %.

Ils ne devaient pas non plus être trop faciles , c'est-à-dire ne nécessiter aucun effort de la part de celui qui les composerait, d'où un pourcentage de cases noires inférieur à 20 % . (Sinon en effet il devient possible de composer des grilles formées en totalité de cases mots de 2 ou 3 lettres).

Pour soutenir la deuxième assertion, on a établi que la longueur moyennne des mots d'une grille nxm avec p cases noires est sensiblement égale à $\frac{2(n.m - p)}{n + m + 2p}$ (cf. [3] , §1, Prop.4).

Pour nous, p est 20 % de n.m, il en résulte que

$$\frac{2\,(n.m - \frac{20}{100}\,n.m)}{n + m + 2.\frac{20}{100}\,n.m} \leq 3 \iff \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \geq \frac{2}{15} .$$

Donc pour des grillesc courantes ayant 20 % de cases noires, la longueur moyenne des mots serait inférieure à 3.

Même dans les commencements des jeux de mots croisés, le pourcentage de cases noires n'était pas trop grand : ainsi dans une grille de 1925 de 11x11, on compte 33 cases noires, soit un pourcentage de 27,272 % (cf. [2] ,p.27).
En se développant, ce jeu s'est imposé des conditions "plus fortes" - c'est-à-dire une diminution des cases noires.

Pour choisir un pourcentage entre 10 et 20 %, il ne reste plus qu'à supposer que la prédilection des gens pour les chiffres ronds a joué (les mots croisés sont un jeu, pas besoin de la précision mathématique des sciences). D'où la règle des 15 %.

Une statistique (cf. [3] , § 2), montre que le pourcentage de cases noires dans les grilles actuelles est de environ 13,591 %. La règle est donc relativement aisée à suivre et ne peut qu'attirer de nouveaux cruciverbistes.

Pour répondre complètement à la question posée, il faudrait considérer aussi certains aspects philosophiques, psychologiques, et surtout sociologiques, surtout ceux liés à l'histoire de ce jeu, à son développement ultérieur, aux traditions.

Bibliographie:

[1] Marcus Solomon, Edmond Nicolau, S.Stati - "Introducere în lingvistica matematica", Bucarest, 1966 (traduit en italien, Pàtron, Bologna, 1971 ; en espagnol, Teide, Barcelona, 1978).
[2] Andrei, Dr.N. - "Îndreptar rebusist", Editura Sport-Turism, Bucarest, 1981.
[3] Smarandache, Florentin - "A mathematical linguistic approach to Rebus", publié dans la "Revue roumaine de linguistique", Tome XXVIII, 1983, collection "Cahiers de linguistique théorique et appliquée", Tome XX, 1983, n°1, p.67-76, Bucarest.

OU SE TROUVE LA FAUTE ?
(EQUATIONS DIOPHANTIENNES)

Enoncé :

(1) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $14x + 26y = -20$.

"Résolution" : La solution générale entière est :

$$\begin{cases} x = -26k + 6 \\ y = 14k - 4 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

(2) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $15x - 37y + 12z = 0$.

"Résolution" : La solution générale entière est :

$$\begin{cases} x = k + 4 \\ y = 15k \\ z = 45k - 5 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

(3) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $3x - 6y + 5z - 10w = 0$.

"Résolution" : l'équation s'écrit :

$3(x - 2y) + 5z - 10w = 0$.

Puisque x, y, z, w sont des variables entières, il en résulte que 3 divise z et que 3 divise w. C'est-à-dire :

$z = 3t_1$ $(t_1 \in \mathbb{Z})$ et $w = 3t_2$ $(t_2 \in \mathbb{Z})$.

Donc : $3(x - 2y) + 3(5t_1 - 10t_2) = 0$ ou $x - 2y + 5t_1 - 10t_2 = 0$.

$$\text{Alors : } \begin{cases} x = 2k_1 + 5k_2 - 10k_3 \\ y = k_1 \\ z = 3k_2 \\ w = 3k_3 \end{cases} \quad \text{avec } (k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{Z}^3,$$

constitue la solution générale entière de l'équation.

Trouver la faute de chaque "résolution" ?

SOLUTIONS.

(1) $x = -26k + 6$ et $y = 14k - 4$ $(k \in \mathbb{Z})$, est une solution entière pour l'équation (parce qu'elle la vérifie), mais elle n'est pas la solution générale : puisque $x = -7$ et $y = 3$ vérifient l'équation, ils en sont une solution entière particulière, mais :

$$\begin{cases} -26k + 6 = -7 \\ 14k - 4 = 3 \end{cases} \quad \text{implique que } k = 1/2 \text{ (n'appartient pas à } \mathbb{Z}).$$

Donc on ne peut pas obtenir cette solution particulière de la "solution générale" antérieure.

$$\text{La vraie solution générale est : } \begin{cases} x = -13k + 6 \\ y = 7k - 4 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}). \text{ (cf [1])}$$

(2) De même, $x = 5$ et $y = 3$ et $z = 3$ est une solution particulière de l'équation, mais qui ne peut pas se tirer de la "solution générale" puisque :

$$\begin{cases} k + 4 = 5 & \Rightarrow & k = -1 \\ 15k = 3 & \Rightarrow & k = 1/5 \\ 45k - 5 = 3 & \Rightarrow & k = 8/45 \end{cases} \text{, contradictions.}$$

La solution générale entière est : $\begin{cases} x = k_1 \\ y = 3\,k_1 + 12\,k_2 \\ z = 8\,k_1 + 37\,k_2 \end{cases}$

(avec $(k_1,k_2) \in \mathbb{Z}^2$)

cf. [1] .

(3) L'erreur est que : "3 divise $(5z - 10\,w)$" n'implique pas que "3 divise z et 3 divise w". Si on le croit on perd des solutions, ainsi $(x,y,z,w) = (-5,0,5,1)$ constitue une solution entière particulière qui ne peut pas s'obtenir à partir de la "solution" de l'énoncé.

La résolution correcte est :

$3(x - 2y) + 5(z - 2w) = 0$, c'est-à-dire $3p_1 + 5p_2 = 0$,

avec $p_1 = x - 2y$ dans $\mathbb{Z}$, et $p_2 = z - 2w$ dans $\mathbb{Z}$.

Il en résulte : $\begin{cases} p_1 = -5k = x - 2y \\ p_2 = 3k = z - 2w \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

D'où l'on tire la solution générale entière :

$$\begin{cases} x = 2k_1 - 5k_2 \\ y = k_1 \\ z = 3k_2 + 2k_3 \\ w = k_3 \end{cases} \quad \text{avec } (k_1,k_2,k_3) \in \mathbb{Z}^3 .$$

[1] On peut trouver ces solutions en utilisant :
Florentin SMARANDACHE -"Un algorithme de résolution dans l'ensemble des nombres entiers pour les équations linéaires".

OU SE TROUVE LA FAUTE SUR LES INTEGRALES ???

Soit la fonction $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par $f(x) = 2 \sin x \cos x$.
Calculons la primitive de celle-ci :

(1)Première méthode.

$$\int 2 \sin x \cos x \, dx = 2\int u \, du = 2\,\frac{u^2}{2} = u^2 = \sin^2 x, \text{ avec } u=\sin x.$$

On a donc $F_1(x) = \sin^2 x$.

(2)Deuxième méthode :

$$\int 2 \sin x \cos x \, dx = -2\int \cos x(-\sin x) \, dx = -2\int v \, dv = -v^2,$$

donc $F_2(x) = -\cos^2 x$.

(3)Troisième méthode :

$$\int 2 \sin x \cos x \, dx = \int \sin 2x \, dx = 1/2\int (\sin 2x) \, 2dx =$$

$$= 1/2\int \sin t \, dt = -1/2 \cos t \text{ donc } F_3(x) = -1/2 \cos 2x .$$

On a ainsi obtenu 3 primitives différentes de la même fonction.
Comment est-ce possible ?

<u>Réponse</u> : Il n'y a aucune faute ! On sait qu'une fonction admet une infinité de primitives (si elle en admet une), qui ne diffèrent que par une constante.

Dans notre exemple on a :

$F_2(x) = F_1(x) - 1$ pour tout réel x ,

et $F_3(x) = F_1(x) -1/2$ pour tout réel x .

OU SE TROUVE LA FAUTE DANS CE RAISONNEMENT PAR RECURRENCE ???

A un concours d'entrée en faculté on a posé le problème suivant :

" Trouver les polynômes $P(x)$ à coefficients réels tels que $xP(x-1) = (x-3)P(x)$, pour tout x réel. "

Quelques candidats ont cru pouvoir démontrer par récurrence que les polynômes de l'énoncé sont ceux qui vérifient la propriété suivante : $P(x) = 0$ pour tout entier naturel.

En effet, disent-ils, si on pose $x= 0$ dans cette relation, il en résulte que $0.P(-1) = -3.P(0)$, donc $P(0) = 0$.
De même, avec $x = 1$, on a :

$$1.P(0) = -2.P(1) \text{ , donc } P(1) = 0, \text{ etc...}$$

On suppose que la propriété est vraie pour $(n-1)$, càd que $P(n-1) = 0$, et on regarde ce qu'il en est pour n :

On a : $n.P(n-1) = (n-3).P(n)$, et puisque $P(n-1) = 0$, il en résulte que $P(n) = 0$.

Où la démonstration pèche-t-elle ???

<u>Réponse</u> : Si les candidats avaient essayé le rang $n = 3$, ils auraient trouvé :

$$3.P(2) = 0.\ P(3) \text{ donc } 0 = 0.P(3),$$

ce qui n'entraîne pas que $P(3)$ est nul : en effet cette égalité est vraie pour tout réel $P(3)$.
L'erreur provient donc de ce que l'implication :

"$(n-3).P(n) = n.P(n-1) = 0 \Longrightarrow P(n) = 0$" n'est pas juste.

On peut trouver facilement que $P(x) = x(x-1)(x-2)K$, $K \in \mathbb{R}$.

PARADOXE MATHEMATIQUE ?

<u>Propriété</u> : Les axes radicals de n cercles d'un même plan, pris deux à deux, dont les centres ne sont pas alignés, sont concourants.

<u>"Démonstration"</u> par récurrence sur $n \geqslant 3$.

Pour le cas $n=3$ on sait que les 3 axes radicals sont concourants en un point qui s'appelle le centre radical. On suppose la propriété vraie pour les valeurs inférieures ou égales à un certain n.

Aux n cercles on ajoute le $(n+1)^{\text{è}}$ cercle.
On a (1) : les axes radicaux des n premiers cercles sont concourants en M.

Prenons 4 cercles quelconques, parmi lesquels figure le $(n+1)^{\text{è}}$. Ceux-ci ont les axes radicals concourants, conformémént à l'hypothèse de récurrence, et au point M (puisque les 3 premiers cercles, qui font partie des n cercles de l'hypothèse de récurrence, ont leurs axes radicals concourrant en M).

Donc les axes radicals des (n+1) cercles sont concourants, ce qui montre que la propriété est vraie pour tout $n \geqslant 3$ de $\mathbb{N}$.

ET POURTANT, on peut construire le
<u>Contre-exemple</u> suivant :

On considère le parallélogramme ABCD qui n'a aucun angle droit. Puis on construit 4 cercles de centres respectifs A, B, C et D, et de même rayon. Alors les axes radicals des cercles $\mathcal{C}(A)$ et $\mathcal{C}(B)$, respectivement $\mathcal{C}(C)$ et $\mathcal{C}(D)$, sont deux droites, médiatrices respectivement des segments AB et CD .
Comme (AB) et (CD) sont parallèles, et que le parallélogramme n'a aucun angle droit, il en résulte que les deux axes radicals sont parallèles ... c'est-à-dire qu'ils ne se coupent jamais.

Expliquer cette (apparente !) contradiction avec la propriété antérieure ?

<u>Réponse</u> : La "propriété" est vraie seulement pour $n = 3$. Or dans la démonstration proposée on utilise la prémisse (fausse) selon laquelle pour $n=4$ la propriété serait vraie. Pour achever la preuve par récurrence il faudrait pouvoir montrer que $P(3) \Rightarrow P(4)$, ce qui n'est pas possible puisque P(3) est vraie mais que le contre-exemple prouve que P(4) est fausse.

B I B L I O G R A P H I E
DU MEME AUTEUR

LIVRES DE MATHEMATIQUES :

1) "Problèmes avec et sans... problèmes !" , Somipress, Fès (Maroc), 1983.
2) "Généralisations et généralités" , Fès (Maroc) , 1984.

ARTICLES ET NOTES MATHEMATIQUES :

1) "Deducibility theorems in mathematics logic", dans la revue "Analele Universitàţii Timişoara" ,seria şt.matematice, Vol.XVII, fasc.2, p.163-168, 1979. (x)
2) "A function in the numbers theory", in "An.Univ.Timişoara", seria şt.matematice, Vol.XVIII, fasc.1,p.79-88, 1980. Article recensé dans "M.R":83c:10008.
3) "Baze de soluţii pentru congruenţe liniare", in revue "Buletinul Universitàţii din Braşov", seria C-Matematicà, Vol.XXII,p.25-31, 1980. Republié dans la revue "Bulet.şt.şi tehn. al Inst.Polit."Traian Vuia" Timişoara", seria Matematicà-Fizicà, Tom.26(40), fasc.2, p. 13-16, 1981. Recensé dans "M.R":83e:10024.
4) "O familie de serii convergente", in revue "Licàriri" (Craïova),nr.30/1980.
5) "Criterii ca un numàr natural sà fie prim", in revue "Gazeta Matematicà",p.49-52,nr.2/1981. Republié dans "Matematikai lapok"(Cluj-Napoca). Article recensé dans "M.R":83a:10007.
6) "Unde este greşeala ?", in revue "Gazeta Matematicà", nr.7/1981. Republié dans "Matematikai Lapok" (Cluj-Napoca).
7) "O generalizare a teoremei lui Euler referitoare la congruenţe", in revue "Bulet.Univ.Braşov", seria C-Matematicà, Vol.XXIII,p.07-12, 1981.
8) "O generalizare a inegalitàţii Cauchy-Buniakovsky-Schwartz", in revue "Gazeta Matematicà", p.386, nr.9-10/ 1982. Republié dans "Matematikai Lapok" (Cluj-Napoca).
9) "A mathematical linguistic approach to Rebus", in "Revue roumaine de linguistique", Tome XXVIII, 1983, collection "Cahiers de linguistique théorique et appliquée", Tome XX, nr.1,p.67-76, 1983.

PROBLEMES PROPOSES :

Publiés dans les revues : "Gazeta Matematicà" (Bucarest),"R.M.T" (Timişoara), "Licàriri" (Craïova), "Matematikai Lapok"(Cluj-Napoca), "Ştiinţà şi tehnicà" (Bucarest), "Nàzuinţe" (Craïova), "Enigmistica" (Craïova), "Caiet 32" (Craïova).

(x) Article recensé dans "Mathematical Reviews" (USA):82a:03012. Cette revue figure dans la suite sous l'abréviation "M.R".